T.C.

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN DDY İLE ÇÖZÜMÜ

Yüksek Lisans Tezi

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY

Çorum- 2023

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN DDY İLE ÇÖZÜMÜ

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

TEZ DANIŞMANI

Dr. Öğr. Üyesi Merve YÜCEL

Çorum 2023

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY tarafından hazırlanan “Diferansiyel Denklemler İçin Başlangıç ve Sınır Değer Problemlerinin DDY İle Çözümü” adlı tez çalışması …/…/…… tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ………………………………………….

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ …………………………………………..

Dr. Öğr. Üyesi Merve YÜCEL …………………………………………….

Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/…… tarih ve …………… sayılı kararı ile ……………………….’ın …………………. Anabilim Dalında Yüksek Lisans/Doktora derecesi alması onanmıştır.

(İmza)

Prof. Dr. Muhammed Asıf YOLDAŞ

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN DDY İLE ÇÖZÜMÜ

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY

ORCID:0000-0003-16717-6217

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

Eylül 2023

ÖZET

Bu çalışmada tek boyutlu ve iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi (DDY) kullanılarak, başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin çözümleri araştırılmıştır. İlk bölümde ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bir boyutlu DDY ile ilgili tanım ve özellikler verilerek üçüncü bölümde de örneklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde iki boyutlu diferansiyel dönüşüm özellikleri ispatları ile verilmiştir. Son bölümde ise iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulamaları yapılmıştır.

Anahtar Kavramlar: Diferansiyel Denklemler, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Sınır Değer Problemi

Bilim Kodu: 20406

SOLUTION OF INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERANTIAL EQUATIONS WITH DTM

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY

ORCID: 0000-0003-16717-6217

HITIT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL

Master of Science Thesis

September 2023

ABSTRACT

In this study, the solution of the initial value and boundary value problems were investigated by using the one-dimensional and two-dimensional differential transformation method (DTM). In the first part, definitions and proposties related to one-dimensional DTM are given and corresponding examples are given in the third part. In the fourth section, the properties of the two-dimensional differential transformation are given with their proofs and their application. In the last section, applications of the two-dimensional differential transformation method are made.

Key Terms: Differential equations, Differential Transform Method, Boundary-Value problems

Science Code: 20406

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın hazırlanmasında hocam Dr. Öğr. Üyesi Merve YÜCEL' e teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa Furkan PÜRLÜSOY

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

GİRİŞ 1

1. BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

1.1. Ön Bilgiler 4

2. BÖLÜM

BİR BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

2.1. Bir Boyutlu DDY Tanımı ve Özellikleri 8

3. BÖLÜM

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI

3.1. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem için Sınır-Değer Problemlerinin DDY ile Çözümü 19

3.1.1. Örnek 19

3.1.2. Örnek 21

3.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem için Sınır-Değer Probleminin DDY ile Çözümü 23

3.3. İkinci Mertebeden Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem için Sınır-Değer Problemlerinin DDY ile Çözümü 25

3.3.1. Örnek 25

3.3.2. Örnek..26

3.3.3. Örnek..28

4. BÖLÜM

İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

4.1. İki Boyutlu DDY tanımı ve özellikleri 31

5. BÖLÜM

İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI

5.1. Örnek 36

5.2. Örnek 38

Sayfa

SONUÇ/SONUÇ VE ÖNERİLER.. 41

KAYNAKÇA... 42

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

Şekil3.1. DDY çözümü (mavi çizgi) ile kesin çözümünün (kırmızı çizgi) karşılaştırılması…**..**22

Şekil 3.2. DDY çözümü (mavi çizgi) ile kesin çözümünün (kırmızı çizgi) karşılaştırılması……26

Şekil 3.3. DDY çözümü (mavi çizgi) ile kesin çözümünün (kırmızı çizgi) karşılaştırılması……28

Şekil 3.4. DDY çözümü (mavi çizgi) ile kesin çözümünün (kırmızı çizgi) karşılaştırılması……30

Şekil 5.1. Problemin kesin çözüm grafiği 37

Şekil 5.2. Problemin kesin çözüm grafiği 40

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

D_D	Diferansiyel dönüşüm operatörü
${D_D}^{-1}$	Ters Diferansiyel dönüşüm operatörü
$m_x\,(x, y)$	m(x,y) fonksiyonunun x değişkenine göre türev fonksiyonu
$m_y\,(x, y)$	m(x,y) fonksiyonunun y değişkenine göre türev fonksiyonu
$m_{xy}\,(x, y)$	m(x,y) fonksiyonunun x ve y değişkenine göre türev fonksiyonu

Kısaltmalar

DDY	Diferansiyel dönüşüm yöntemi

GİRİŞ

Cebirsel, diferansiyel, integral vb. denklemleri analitik olarak çözmek çoğu zaman imkansız da olabilir. Bundan dolayı, problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Nümerik yöntemler teorinin pratikte kullanılabilmesi açısından son zamanlarda daha da önemli hale gelmiştir. Birçok nümerik yöntem farklı problemleri çözmek amacıyla kurulmuştur. Laplace, Fourier, Adomian, Wavelet, Galerkin, Runge Kutta, Newton ve Diferensiyel Dönüşüm yöntemi en çok uygulanan nümerik yöntemlere örnek olarak gösterilebilir.

Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) ilk defa Zhou (1986), tarafından elektrik devrelerinin analizinde ortaya çıkan probleminin çözümünde kullanılarak tanıtılmıştır. DDY, diferansiyel dönüşüm işlemlerini kullanarak orijinal diferansiyel denklemden elde edilen dönüştürülmüş lineer cebirsel denklemler sisteminin tekrarlı bir prosedür ile çözümüne olanak sağlamaktadır. Taylor polinomları şeklinde yaklaşık çözümleri elde etmek için kullanılmaktadır. Diğer yöntemlerden farklı olarak bu yöntem diferansiyel denklem problemlerini cebirsel denklem şeklinde yazılmasına olanak sağlar. Aynı zamanda bu yöntem çeşitli problem çözümlerinde kullanılabilir. Diferansiyel dönüşüm terimi ilk kez doğrusal ve doğrusal olmayan başlangıç değer problemlerini çözen Pukhov (1986), tarafından tanıtıldı. Taylor yönteminin çeşitli eksiklikleri vardır. Bunlardan birisi yüksek mertebeden türevlerinin hesaplanması ihtiyacıdır. Harcanan zaman fazladır.

DDY, diğer yöntemlerle kıyaslandığında çabuk, zamandan kazandıran ve yineleyen bir sisteme sahip olduğundan bilgisayar yardımıyla çözümlere uygun yapısıyla dikkat çeker. Ayrıca DDY ile çok düşük hata payı ile yaklaşık çözümler bulunur. Bu yöntem doğrusal ve doğrusal olmayan problemleri yaklaşık olarak çözmek için güçlü bir araçtır ve özdeğer problemlerinin çözümünde de kullanılmaktadır. Chen ve Ho (1996), çalışmalarında özdeğer probleminin çözümü için diferensiyel dönüşüm yöntemini kullanarak özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonu bulmuşlardır. Chen ve Liu. (1998), lineer olmayan ısı iletme problemlerini çözmek için diferansiyel dönüşümü kullanmışlardır.

Birçok fiziksel sistemin matematiksel modellemesi, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlere yol açar. Bu tür sistemlerin sayısal ve analitik yaklaşımları DDY ile çözülebilir. Isı iletimi problemlerinin incelenmesi amacıyla Sturm ve Liouville tarafından ortaya konulan problemler günümüzde yoğun olarak çalışılmaktadır. L ikinci mertebeden diferensiyel operatör olmak üzere,

$$L[u] = (p(x)u')' + q(x)u = -\lambda r(x)u, \qquad \alpha < x < \beta$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem ve

$$B_{\alpha}[u] = \mu_1 u(\alpha) + \mu_2 u'(\alpha) = 0$$

$$B_{\beta}[u] = \delta_1 u(\beta) + \delta_2 u'(\beta) = 0$$

şeklinde sınır şartları ile verilen sınır değer problemi Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılmaktadır.

Sturm-Liouville problemlerinin spektral özellikleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Birkoff (1908), özdeğere bağlı adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için asimptotik eşitlikler elde ederek, regüler sınır-değer problemlerinin özfonksiyonlarının özelliklerini incelemiştir. Walter (1973), ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin uygun Hilbert uzaylarında kendine eşlenik operatörlerle bağlantısını kurmuştur. (Muhtarov ve ark., 1994, 2015, 2020, 2021), çalışmalarında ise çok aralıklı Sturm-Liouville problemlerini araştırmışlardır.

Doğrusal olmayan tam diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmek genellikle zordur ve kesin çözümleri bulunan denklem çeşidi çok azdır. Literatürde Wavelet–Galerkin yöntemi (WGM) (Avudainayagam, 2000), lagrange interpolasyon yöntemi (Rashed, 2003), ve Tau yöntemi (Hosseini ve Shahmorad, 2003), gibi sayısal teknikler ve Adomian'ın ayrıştırması gibi yarı analitik-sayısal teknikler (El-Sayed ve Abdel-Aziz, 2003), Taylor polinomları (Maleknejad ve Mahmoudi, 2003), ve rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyonları yöntemi (Maleknejad ve ark, 2003), v.b. var. Ancak hiçbiri bunları analitik çözmek için metodik bir yol önermemektedir. Ayrıca, önceki çalışmalar sonuçlara ulaşmak için daha fazla işlem gerektirir, ve genellikle özel tip denklemler için geliştirilmişlerdir.

DDY'de çözüm, Taylor serisi formu olarak ifade edilir. Bu yöntemin ana avantajı herhangi bir pertürbasyon, ayrıklaştırma olmaksızın doğrudan probleme uygulanabilmesidir. Ayrıca daha doğru veya kesin çözümler sunar. DDY'nin çözüm alanı çok geniştir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, öz değer problemlerinin, integral denklemlerinin çözümünde ve daha pek çok alanda kullanılır. Bazı kısmi türevli denklemlerin iki boyutlu DDY ile çözümleri Jang (2001), tarafından incelemiştir. Ayrıca Karakoç ve Bereketoğulları (2009), ise delay (geciken değişkenli) diferansiyel denklemlerin çözümünü DDY ile araştırmışlardır. DDY akışkan mekaniği, jeofizik ve çeşitli mühendislik alanlarında da kullanılmıştır (Abuteen ve Momani, 2014; Arikoglu ve Özkol, 2006; Pukhov, 1986; Zhou, 1986).

Kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için de DDY kullanılır (Maleknejad ve Mahmoudi, 2003; Jang ve ark., 2001; Odibat ve Momani, 2008; Pukhov, 1986). Bu bağlamda, başlangıçta adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için geliştirilen yarı sayısal bir analitik yöntem olan DDY sonraki yıllarda araştırmacılar arasında büyük ilgi görmüştür. Bununla birlikte kesirli diferansiyel denklemin sınır koşulları ile çözümü söz konusu olduğunda, Ertürk (2011), Odibat ve Momani (2008), DDY'nin çok daha değerli bir araç olabileceğini kanıtladı. Arikoglu ve Özkol (2006), aynı yöntemi kullanarak fark denklemlerinin çözümünü bulmuşlardır. Arikoğlu (Arikoglu ve Özkol, 2008), çalışmasında integro-diferansiyel denklemlerin DDY ile çözmüştür. DDY'yi ısı iletim problemlerinde de kullanmışlardır (Chen ve Liu, 1998). Chen ve Hou (1999), 2 boyutlu DDY'yi matematiğe kazandırdı. Doğrusal ve doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin DDY ile çözümü Hassan (2002), tarafından araştırılarak bulunan çözümler, Runge-Kutta yöntemi ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır.

1.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Tanım 1.1. (Levitan ve Sargsyan, 1988) $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ reel değerli fonksiyonları bir $[a,b]$ reel aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığının her noktasında $p(x)>0$, $r(x)>0$ olmak üzere λ ise x değişkeninden bağımsız kompleks bir parametre olmak üzere

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda\, r(x)y(x), \qquad a \le x \le b \tag{1}$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \tag{2}$$

şeklindeki probleme regular Sturm-Liouville sınır-değer problemi denir. Sınır şartlarında bulunan α_1 ve α_2 reel sayılarından en az birisi sıfırdan farklı ve β_1 ve β_2 reel sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

Tanım 1.2. (Levitan ve Sargsyan, 1988) $y(a) = y(b)$ ve $y'(a) = y'(b)$ biçiminde sınır şartlarına periyodik sınır şartları denir, bu sınır şartları ile verilmiş (1) denklemine ise periyodik Sturm-Liouville problemi adı verilir.

Tanım 1.3. (Levitan ve Sargsyan, 1988) Regüler olmayan Sturm-Liouville problemine singüler Sturm-Liouville problemi veya singüler Sturm-Liouville sistemi denir. Aşağıda verilen maddelerden en az birini sağlıyorsa ele alınan problem bir singüler Sturm-Liouville problemidir.

1-Herhangi bir $x \in [a,b]$ için $p(x) = 0$ veya $r(x) = 0$

2- $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ veya $r(x)$ katsayı fonksiyonlarından en az biri en az bir $x_0 \in [a,b]$ de sürekli değil.

3-Denklemin tanım aralığı sınırsızdır, yani $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, (a,∞), $[a,\infty)$ veya $(-\infty,\infty)$ biçimindedir.

Örnek 1.1. p bir sabit olmak üzere

$$x^2y'' + xy' + (a^2x^2 - p^2)y = 0, \qquad 0 < x \le a$$

Bessel denkleminin her iki tarafını x ile bölersek

$$xy'' + y' + a^2xy - \frac{p^2}{x}y = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{x}\frac{\mathrm{dy}}{dx}\right)-\frac{\mathrm{p}^2}{\mathrm{x}}\mathrm{y}+a^2\mathrm{xy}=0$$

biçiminde yazılırsa $\mathrm{p(x)} = \mathrm{x}, \mathrm{q(x)} = \frac{\mathrm{p}^2}{\mathrm{x}}, \mathrm{r(x)} = \mathrm{x}$ ve $\lambda = a^2$ olan bir Sturm -Liouville denklemi şeklini alır.

Örnek 1.2.

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0, \quad -1<\mathrm{x}<1$$

Legendre denklemi

$$\left((1-\mathrm{x}^2)\mathrm{y}'\right)'+\lambda\mathrm{y}=0$$

şeklindeki bir Sturm-Liouville denklemi formunda yazılabilir. Legendre denklemi $x=\pm 1$ noktalarında singülerdir. Bu denklem için sınır şartları $x\to -1^+$ ve $x\to 1^-$ değerlerine göre oluşturulur.

Regüler Sturm-Liouville Sınır Değer Probleminin Öz fonksiyonlarının Özellikleri

1) Özfonksiyonların Serisi

Teorem 1.1. (Kandemir, 2015) $[a, b]$ aralığında Regüler Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri λ_v, $v=1,2,\ldots$ ve bu özdeğerlere uygun normlandırılmış ortogonal özfonksiyonlar sistemi y_n, $n=1,2,\ldots$ olsun ve f fonksiyonu $a<x<b$ aralığında parçalı düzgün olsun. Yani f fonksiyonunun (y_n) ortonormal özfonksiyonlar sistemine göre Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(\mathrm{x}), \qquad c_n=\int_a^b f(x)y_n(x)dx$$

biçiminde ifade edilsin. O halde bu özfonksiyon serisi f nin sürekli olduğu her x noktasında $\mathrm{f(x)}$ fonksiyonuna ve f nin süreksiz olduğu her $x=x_i$ noktasında

$$\frac{1}{2}\left(lim_{x\to x_i-}f(\mathrm{x})+lim_{x\to x_i+}f(\mathrm{x})\right)$$

değerine yakınsar.

2) Özfonksiyonların Sıfırı

Teorem 1.2. (Kandemir, 2015) Regüler Sturm-Liouville probleminin $\lambda_n, n=1,2,3,\ldots$, özdeğerlerine karşılık gelen her bir y_n özfonksiyonunun $a<x<b$ aralığında $(n-1)$ tane sıfırı (özfonksiyonu sıfır yapan nokta) vardır.

Örnek 1.3.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problemin özdeğer ve özfonksiyonlarını araştıralım.

Durum 1. $\lambda = 0$

Bu durumda diferansiyel denklem, $y'' = 0$ biçiminde elde edilir. Bu denklemin genel çözümü $y(x) = c_1 + c_2 x$ biçimindedir. $y(0) = c_1$ olduğu için $y(0) = 0$ sınır şartı gereği $c_1 = 0$ elde edilir. $y'(x) = c_2$ ve $y'(L) = c_2$ olduğu için $y'(L) = 0$ sınır şartı gereği $c_2 = 0$ elde edilir. Demek ki $\lambda = 0$ değerine uygun problemin bir tek $y = 0$ çözümü mevcuttur. Yani $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

Durum 2. $\lambda > 0$

Bu durumda diferansiyel denklem $y'' + \lambda y = 0$ biçiminde elde edilir. Karakteristik denklem ise $r^2 + \lambda = 0$ biçiminde, yani $r^2 = -\lambda$ biçiminde bulunur. Bu cebirsel denklemin iki farklı

$r_1 = i\sqrt{\lambda}$ ve $r_2 = -i\sqrt{\lambda}$ kompleks kökleri mevcuttur. Bu nedenle temel çözüm

$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$ biçiminde yazılabilir. Sınır şartlarında yerine yazarsak $y(0) = c_1 = 0$, $y'(x) = \sqrt{\lambda}\left(c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) - c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x)\right)$, $\sqrt{\lambda}c_2\cos(\sqrt{\lambda}L) = 0$,

$\sqrt{\lambda}L = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ ve $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}$, $n = 0,1,2,\ldots$ elde edilir.

Yani verilmiş problemin sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}$, $n = 1,2,\ldots$ özdeğerleri mevcuttur. Bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar ise

$$y_n = a_n \sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x), \quad n = 1,2,\ldots$$

biçimindedir. Burada $a_n \neq 0$ keyfi sayılardır.

Durum 3. $\lambda < 0$

Bu durumda özdeğerin mevcut olmadığı benzer biçimde gösterilebilir.

3) Özfonksiyonlarının Dikliği

Bir $a \leq x \leq b$ aralığında $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ farklı iki özfonksiyon olmak üzere

$\int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx = 0$ ise $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ özfonksiyonlarına $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diktir (ortogonal) denir. Böyle özfonksiyonların kümesine dik küme adı verilir.

Teorem 1.3. (Kandemir, 2015) Regüler Sturm-Liouville probleminin birbirinden farklı λ_m ve λ_n özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen farklı $y_m(x)$ ve $y_n(x)$ özfonksiyonları $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diktir.

2. BÖLÜM

BİR BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

2.1. Bir Boyutlu DDY Tanım ve Özellikleri

Tanım 2.1. (Zhou, 1986) ρ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, $m(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $M(\rho)$

$$D_D\{m(x)\} = M(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}, \quad \rho = 0,1,2,\dots \text{ olarak tanımlanır.}$$

Tanım 2.2. (Zhou, 1986) $M(\rho)$ nın ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$D_D^{-1}\{M(\rho)\} = m(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} M(\rho)(x - x_0)^\rho$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. (Zhou,1986) İki fonksiyonun toplamının diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{m(x) \pm n(x)\} = D_D\{m(x)\} \pm D_D\{n(x)\}$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$D_D\{m(x)\} = M(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

ve

$$D_D\{n(x)\} = N(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho n(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$D_D\{m(x) \pm n(x)\} = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho}{dx^\rho}[m(x) \pm n(x)]\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho n(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0} \pm \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho n(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

ile yazılarak istenilen sonuca ulaşılmış oldu.

Teorem 2.2. (Zhou, 1986) Bir fonksiyonun $c \in R$ sabit değeri ile çarpımının diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{cm(x)\} = cD_D\{m(x)\} = cM(\rho)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$D_D\{m(x)\} = M(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_D\{cm(x)\} &= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho[cm(x)]}{dx^\rho}\right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{cd^\rho m(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0} \\ &= \frac{c}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0} \\ &= cD_D\{m(x)\} \\ &= cM(\rho) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3. (Zhou,1986) $m(x)$ in birinci mertebeden türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{dm(x)}{dx}\right\} = (\rho+1)M(\rho+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} D_D\left\{\frac{dm(x)}{dx}\right\} &= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho}{dx^\rho}\left[\frac{dm(x)}{dx}\right]\right]_{x=x_0} \\ &= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^{\rho+1}m(x)}{dx^{\rho+1}}\right]_{x=x_0} \\ &= (\rho+1)\frac{1}{(\rho+1)!}\left[\frac{d^{\rho+1}m(x)}{dx^{\rho+1}}\right]_{x=x_0} \\ &= (\rho+1)M(\rho+1) \end{aligned}$$

Teorem 2.4. (Zhou, 1986) $m(x)$ in r. mertebeden türevinin diferansiyel dönüşümü ($r \in N$) için

$$D_D\left\{\frac{d^r m(x)}{dx^r}\right\} = (\rho+1)(\rho+2)\ldots(\rho+r)M(\rho+r)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$D_D\left\{\frac{d^r m(x)}{dx^r}\right\} = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho}{dx^\rho}\left[\frac{d^r m(x)}{dx^r}\right]\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^{\rho+r} m(x)}{dx^{\rho+r}}\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{(\rho+r)!}{\rho!}\frac{1}{(\rho+r)!}\left[\frac{d^{\rho+r} m(x)}{dx^{\rho+r}}\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{(\rho+r)!}{\rho!}M(\rho+r)$$

$$= (\rho+1)(\rho+2)(\rho+3)\ldots(\rho+r)M(\rho+r)$$

Teorem 2.5. (Zhou, 1986) m(x) ve n(x) fonksiyonlarının çarpımının diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{m(x)n(x)\} = \sum_{r=0}^{\rho} M(r)N(\rho-r)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: m(x)n(x) fonksiyonlarının çarpımının ρ mertebeden türevi,

$$\frac{d^\rho}{dx^\rho}[m(x)n(x)] = \frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho}n(x) + \binom{\rho}{1}\frac{d^{\rho-1}m(x)}{dx^{\rho-1}}\frac{dn(x)}{dx} + \binom{\rho}{2}\frac{d^{\rho-2}m(x)}{dx^{\rho-2}}\frac{d^2n(x)}{dx^2} + \ldots$$

$$+ \binom{\rho}{n}\frac{d^{\rho-n}m(x)}{dx^{\rho-n}}\frac{d^n n(x)}{dx^n} + \ldots + \binom{\rho}{\rho-1}\frac{dm(x)}{dx}\frac{d^{\rho-1}n(x)}{dx^{\rho-1}} + \frac{d^\rho n(x)}{dx^\rho}m(x)$$

şeklindedir. Bu ifadeden yararlanılarak

$$D_D\{m(x)\} = M(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

$$D_D\{n(x)\} = N(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho n(x)}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

olmak üzere

$$D_D\{m(x)n(x)\} = \frac{1}{\rho!}[\frac{d^\rho m(x)}{dx^\rho} n + \binom{\rho}{1}\frac{d^{\rho-1}m(x)}{dx^{\rho-1}}\frac{dn}{dx} + \binom{\rho}{2}\frac{d^{\rho-2}m}{dx^{\rho-2}}\frac{d^2n}{dx^2} + \ldots +$$

$$+ \binom{\rho}{n}\frac{d^{\rho-n}m(x)}{dx^{\rho-n}}\frac{d^n n(x)}{dx^n} + \binom{\rho}{\rho-1}\frac{dm(x)}{dx}\frac{d^{\rho-1}n}{dx^{\rho-1}} + m\frac{d^\rho n}{dx^\rho}]$$

$$= \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m}{dx^\rho} n\right]_{x=x_0} + \frac{1}{\rho!}\binom{\rho}{1}\left[\frac{d^{\rho-1}m}{dx^{\rho-1}}\frac{dn}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{\rho!}\binom{\rho}{2}\left[\frac{d^{\rho-2}m}{dx^{\rho-2}}\frac{d^2n}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\rho!}\binom{\rho}{n}\left[\frac{d^{\rho-n}f}{dx^{\rho-n}}\frac{d^n g}{dx^n}\right]_{x=x_0} + \ldots + \frac{1}{\rho!}\left[m\frac{d^\rho n}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

$$= \frac{1}{0!}\frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m}{dx^\rho} n\right]_{x=x_0} + \frac{1}{1!}\frac{1}{(\rho-1)!}\left[\frac{d^{\rho-1}m}{dx^{\rho-1}}\frac{dn}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(\rho-2)!}\left[\frac{d^{\rho-2}m}{dx^{\rho-2}}\frac{d^2n}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{1}{(\rho-n)!}\left[\frac{d^{\rho-n}m}{dx^{\rho-n}}\frac{d^n n}{dx^n}\right]_{x=x_0} + \cdots + \frac{1}{1!}\frac{1}{(\rho-1)!}\left[\frac{dm}{dx}\frac{d^{\rho-1}n}{dx^{\rho-1}}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{0!}\frac{1}{(\rho)!}\left[m\frac{d^\rho n}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}$$

elde edilir. İfadeler düzenlenirse,

$$D_D\{m(x)n(x)\} = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}\frac{1}{\rho!}[n(x)]_{x=x_0} + \frac{1}{(\rho-1)!}\left[\frac{d^{\rho-1}m(x)}{dx^{\rho-1}}\right]_{x=x_0}\frac{1}{1!}\left[\frac{dn(x)}{dx}\right]_{x=x_0} +$$

$$+ \frac{1}{(\rho-2)!}\left[\frac{d^{\rho-2}m(x)}{dx^{\rho-2}}\right]_{x=x_0}\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2n(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \cdots + \frac{1}{(\rho-n)!}\left[\frac{d^{\rho-2}m}{dx^{\rho-n}}\right]_{x=x_0}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n n}{dx^n}\right]_{x=x_0}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{1!}\left[\frac{dm}{dx}\right]_{x=x_0}\frac{1}{(\rho-1)!}\left[\frac{d^{\rho-1}m}{dx^{\rho-1}}\right]_{x=x_0} + \frac{1}{0!}[m(x)]_{x=x_0}\frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^\rho m}{dx^\rho}\right]_{x=x_0}.$$

$$= M(\rho)N(0) + M(\rho-1)N(1) + M(\rho-2)N(2) + \ldots$$

$$+ M(\rho-n)N(n) + \ldots\ldots + M(1)N(\rho-1) + M(0)N(\rho)$$

$$= \sum_{r=0}^{\rho} M(r)\, N(\rho-r)$$

eşitliği bulunur.

Teorem 2.6. (Zhou, 1986) Üç fonksiyonun çarpımının diferansiyel çözümü için

$$D_D\{m(x)n(x)h(x)\} = \sum_{r=0}^{\rho}\sum_{t=0}^{\rho-r} M(r)N(t)H(\rho-r-t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Üç fonksiyonun çarpımı $w(\mathrm{x})$ fonksiyonu ile gösterilirse,

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{m(x)n(x)h(x)}\} = \mathrm{D_D}\{\mathrm{w(x)}\} = \mathrm{W}(\rho)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathrm{u(x)} = \mathrm{n(x)h(x)}$ kabul edilsin. Teorem 2.5 ten

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{n(x)h(x)}\} = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\rho} \mathrm{N(r)H}(\rho-\mathrm{r})$$

bulunur. $w(x) = \mathrm{m}(x)\mathrm{u}(x)$ olduğu kullanılarak Teorem 2.5 den,

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{m(x)u(x)}\} = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\rho} \mathrm{M(r)U}(\rho-\mathrm{r})$$

eşitliği elde edilir.

$$\mathrm{U}(\rho-\mathrm{r}) = \sum_{t=0}^{\rho-\mathrm{r}} \mathrm{N}(t)\mathrm{H}(\rho-\mathrm{r}-t)$$

ifadesi yerine yazılarak dönüşüm fonksiyonu için

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{m(x)n(x)h(x)}\} = \mathrm{W}(\rho) = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\rho}\sum_{\mathrm{t}=0}^{\rho-\mathrm{r}} \mathrm{M(r)N(t)H}(\rho-\mathrm{r}-\mathrm{t})$$

eşitliği elde edilir. $\mathrm{W}(\rho)$ değerleri için istenilen

$$W(0) = \sum_{r=0}^{0}\sum_{t=0}^{0-r} \mathrm{M(r)N(t)H}(\rho-\mathrm{r}-\mathrm{t})$$

$$= \sum_{r=0}^{0} \mathrm{M(r)N(0)H(0)} = \mathrm{M(0)N(0)H(0)}$$

$$W(1) = \sum_{r=0}^{1}\sum_{t=0}^{1-r} \mathrm{M(r)N(t)H}(\rho-\mathrm{r}-\mathrm{t})$$

$$= \mathrm{M(0)[N(0)H(1) + N(1)H(0)] + M(1)N(0)H(0)}$$

$$W(2) = \sum_{r=0}^{2}\sum_{t=0}^{2-r} \mathrm{M(r)N(t)H}(\rho-\mathrm{r}-\mathrm{t})$$

$$= \mathrm{M(0)[N(0)H(2) + N(1)H(1) + N(2)H(0)]} +$$
$$+\mathrm{M(1)[N(0)H(1) + N(1)H(0)] + M(2)\,N(0)H(0)}$$

eşitlikleri bulunur.

Sonuç 2.1. (Zhou, 1986) $m(x)n'(x)$ nın diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{m(x)\frac{dn(x)}{dx}\right\} = \sum_{r=0}^{\rho} (\rho - r + 1)M(r)N(\rho - r + 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $h(x) = n'(x)$ olsun. 2.4 teoreminden

$$D_D\left\{\frac{dn(x)}{dx}\right\} = H(\rho) = (\rho + 1)N(\rho + 1)$$

şeklindedir. Dolayısıyla $m(x)h(x)$ fonksiyonunun dönüşümü bulunmalıdır. Teorem (2.5) den

$$D_D\{m(x)h(x)\} = \sum_{r=0}^{\rho} M(r)H(\rho - r) \tag{3}$$

eşitliği elde edilir.

$$H(\rho - r) = (\rho - r + 1)N(\rho - r + 1) \tag{4}$$

(4) ifadesi bulunan (3) eşitliğinde yerine yazılarak

$$D_D\{m(x)\tfrac{dn(x)}{dx}\} = \sum_{r=0}^{\rho} (\rho - r + 1)M(r)N(\rho - r + 1)$$

bulunur.

Sonuç 2.2. (Zhou, 1986) $m'(x)n'(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{dm(x)}{dx}\frac{dn(x)}{dx}\right\} = \sum_{r=0}^{\rho} (r + 1)(\rho - r + 1)M(r + 1)N(\rho - r + 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $u(x) = \frac{dm(x)}{dx}$ ve $v(x) = \frac{dn(x)}{dx}$ olsun. Bu durumda dönüşümü aranılan fonksiyon $u(x)v(x)$ dir. Teorem (2.3) den

$$D_D\left\{\frac{dm(x)}{dx}\right\} = (\rho + 1)M(\rho + 1) = u(\rho)$$

$$D_D\left\{\frac{dn(x)}{dx}\right\} = (\rho + 1)N(\rho + 1) = v(\rho)$$

eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla

$$D_D\{u(x)v(x)\} = \sum_{r=0}^{\rho} U(r)V(\rho - r) \tag{5}$$

elde edilir.

$$U(r) = (r+1)M(r+1)$$

ve

$$V(\rho - r) = (\rho - r + 1)N(\rho - r + 1)$$

ifadeleri (5) de yerine yazılırsa aranılan sonuç elde edilir.

Teorem 2.7. (Zhou, 1986) $\lambda \in R$ olmak üzere $m(x) = \tau^{\lambda x}$ üstel fonksiyonun diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{\tau^{\lambda x}\} = M(\rho) = \frac{\lambda^{\rho}(\ln\tau)^{\rho}}{\rho!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bu teoremi tümevarım yöntemi ile ispat edelim. Dönüşümün tanımından,

$$D_D\{\tau^{\lambda x}\} = M(\rho) = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^{\rho}m(x)}{dx^{\rho}}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{d^{\rho}}{dx^{\rho}}\tau^{\lambda x}\right]_{x=x_0}$$

yazılır. $\rho = 0$ için $\frac{\lambda^{\rho}(\ln\tau)^{\rho}}{\rho!} = 1$ ve $M(0) = \frac{1}{(0)!}\left[\tau^{\lambda x}\right]_{x=0} = \frac{1}{0!} = 1$ olduğu için $\rho = 0$ için formül geçerlidir. $\rho = n$ için doğru olduğunu kabul edersek, yani

$$\frac{d^{n}(\tau)^{\lambda x}}{dx^{n}} = \lambda^{n}(\ln\tau)^{n}\tau^{\lambda x}$$

olduğunu kabul ederek, $\rho = n+1$ için doğruluğunu, yani

$$\frac{d^{n+1}(\tau)^{\lambda x}}{dx^{n+1}} = \lambda^{n+1}(\ln\tau)^{n+1}\tau^{\lambda x}$$

eşitliğini ispat edelim.

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}(\tau)^{\lambda x}}{dx^{n+1}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n}(\tau^{\lambda x})}{dx^{n}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n}(\tau^{\lambda x})}{dx^{n}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\lambda^{n}(\ln\tau)^{n}\tau^{\lambda x}\right) \\
&= \lambda^{n}(\ln\tau)^{n}\left(\frac{d(\tau^{\lambda x})}{dx}\right) \\
&= \lambda^{n}(\ln\tau)^{n}\lambda\tau^{\lambda x}\ln\tau \\
&= \lambda^{n+1}(\ln\tau)^{n+1}\tau^{\lambda x}
\end{aligned}$$

formül tümevarım yöntemi ile ispat olundu. O halde istenilen

$$D_D\{\tau^{\lambda x}\} = M(\rho) = \frac{1}{\rho!}\frac{d^\rho(\tau^{\lambda x})}{dx^\rho} = \frac{1}{\rho!}\lambda^\rho(\ln\tau)^\rho(\tau^{\lambda x}) = \frac{1}{\rho!}\lambda^\rho(\ln\tau)^\rho$$

formülü elde edilir.

Sonuç 2.3. (Zhou, 1986) $a \in R$ olmak üzere $m(x) = e^{ax}$ ise

$$D_D\{e^{ax}\} = M(\rho) = \frac{a^\rho}{\rho!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (2.9) dan $\tau = e$ alınırsa

$$D_D\{e^{ax}\} = M(\rho) = \frac{a^\rho(\ln e)^\rho}{\rho!} = \frac{a^\rho}{\rho!}$$

elde edilir.

Teorem 2.8. (Zhou, 1986) sinh(ax) fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü,

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \begin{cases} \frac{a^\rho}{\rho!}, & \rho \text{ tek olması durumunda} \\ 0, & \rho \text{ çift olması durumunda} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\sinh(ax) = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$ olduğu kullanılarak

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \frac{1}{\rho!}\left[\frac{a^\rho}{ax^\rho}\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right]\right]_{x=x_0}$$

yazılır. Dönüşümün lineerliğinden

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho!}\left[\frac{a^\rho[e^{ax}]}{ax^\rho}\right]_{x=x_0}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho!}\left[\frac{a^\rho[e^{-ax}]}{ax^\rho}\right]_{x=x_0}$$

olduğu görülür. Sonuç 2.3 den

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \frac{1}{2}\frac{a^\rho}{\rho!} - \frac{1}{2}\frac{(-a^\rho)}{\rho!} = \frac{1}{2}\left[\frac{a^\rho}{\rho!} - \frac{(-a)^\rho}{\rho!}\right]$$

ρ tek olması durumunda

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \frac{1}{2}[\frac{a^\rho}{\rho!} + \frac{a^\rho}{\rho!}] = \frac{a^\rho}{\rho!}$$

ρ çift olması durumunda

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \frac{1}{2}[\frac{a^\rho}{\rho!} - \frac{a^\rho}{\rho!}] = 0$$

bulunur. Sonuç olarak

$$D_D\{\sinh(ax)\} = \begin{cases} \frac{a^\rho}{\rho!}, & \rho \text{ tek olması durumunda} \\ 0, & \rho \text{ çift olması durumunda} \end{cases}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.9. (Zhou, 1986) $\cosh(vx)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{\cosh(vx)\} = \begin{cases} 0, & \rho \text{ tek olması durumunda} \\ \frac{v^\rho}{\rho!}, & \rho \text{ çift olması durumunda} \end{cases}$$

eşitliği ağlanır.

İspat: $\cosh(vx) = \frac{e^{vx}+e^{-vx}}{2}$ olduğu kullanılarak

$$D_D\{\cosh(vx)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho!}[\frac{d^\rho[e^{vx}]}{dx^\rho}]_{x=x_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho!}[\frac{d^\rho[e^{-vx}]}{dx^\rho}]_{x=x_0}$$

yazılır. O halde

$$D_D\{\cosh(vx)\} = \frac{1}{2}\frac{v^\rho}{\rho!} + \frac{1}{2}\frac{(-\lambda^\rho)}{\rho!} = \frac{1}{2}[\frac{v^\rho}{\rho!} + \frac{(-v^\rho)}{\rho!}]$$

eşitliği göz önüne alınarak ρ tek ise

$$D_D\{\cosh(vx)\} = \frac{1}{2}[\frac{v^\rho}{\rho!} - \frac{v^\rho}{\rho!}] = 0$$

ρ çift ise

$$D_D\{\cosh(vx)\} = \frac{1}{2}[\frac{v^\rho}{\rho!} + \frac{v^\rho}{\rho!}] = \frac{v^\rho}{\rho!}$$

yazılır. Buradan

$$D_D\{\cosh(vx)\} = \begin{cases} 0, & \rho \text{ tek olması durumunda} \\ \dfrac{v^\rho}{\rho!}, & \rho \text{ çift olması durumunda} \end{cases}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 2.10. (Zhou, 1986) $\tau, b \in R$ için $m(x) = \sin(\tau x + b)$ ise

$$D_D\{\sin(\tau x + b)\} = M(\rho) = \frac{\tau^\rho}{\rho!}\sin\left(\frac{\pi\rho}{2} + b\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $k = 0,1,2, \ldots$ olmak üzere $\rho = 2k + 1$ için $\frac{d^{2k+1}[\sin(\tau x+b)]}{dx^{2k+1}} = (-1)^k \tau^{2k+1}\cos(\tau x + b)$

ve $\rho = 2k$ için $\frac{d^{2k}[\sin(\tau x+b)]}{dx^{2k}} = (-1)^k \tau^{2k}\sin(\tau x + b)$ eşitliklerinden $x = 0$ yazarak ispat direkt olarak elde edilir.

Teorem 2.11. (Zhou, 1986) $\tau, b \in R$ seçimi üzerine $m(x) = \cos(\tau x + b)$ ise

$$D_D\{\cos(\tau x + b)\} = M(\rho) = \frac{\tau^\rho}{\rho!}\cos\left(\frac{\pi}{2}\rho + b\right)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak yapılır.

Teorem 2.12. (Zhou, 1986) $m(x) = x^t$, $t \in N$, kuvvet fonksiyonunun

$x = 0$ noktasındaki diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{x^t\} = \delta(\rho - t) = \begin{cases} 1, & \rho = t \text{ olması durumunda} \\ 0, & \rho \neq t \text{ olması durumunda} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Aşağıdaki durumları ayrı ayrı inceleyeceğiz.

1.Durum $\rho < t$ ise $[\frac{d^\rho[x^t]}{dx^\rho}]_{x=0} = [t(t-1)(t-2)\ldots(t-\rho+1)x^{t-\rho}]_{x=0} = 0$

$$D_D\{(x^t)\} = \frac{1}{\rho!}[\frac{d^\rho[x^t]}{dx^\rho}]_{x=0} = \frac{0}{\rho!} = 0$$

2.Durum

$\rho = t$ ise $[\frac{d^\rho[x^t]}{dx^\rho}]_{x=0} = [t(t-1)(t-2)\ldots(t-\rho+1)x^{t-t}]_{x=0} = t!$

$$D_D\{(x^t)\} = \frac{1}{t!}[\frac{d^t[x^t]}{dx^t}]_{x=0} = \frac{t!}{t!} = 1$$

3.Durum

$$\rho > t \quad \text{ise} \quad [\frac{d^\rho[x^t]}{dx^\rho}]_{x=0} = [t(t-1)(t-2)\ldots(t-t+1)0]_{x=0} = 0$$

$$D_D\{(x^t)\} = \frac{1}{\rho!}[\frac{d^\rho[x^\rho]}{dx^\rho}]_{x=0} = \frac{0}{\rho!} = 0$$

dolayısıyla istenilen elde edilir. Sonuç $m(x) = c$ sabit fonksiyonu için

$$D_D\{c)\} = D_D\{cx^0)\} = c\delta(\rho)$$

eşitliği sağlanır.

3.BÖLÜM
DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI

3.1. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem için Sınır-Değer Problemlerinin DDY ile Çözümü

3.1.1. Örnek

$$y''(x) + 2y'(x) = 0, \qquad x \in (0,1) \tag{6}$$

homojen olan Sturm-Liouville denkleminden ve

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

sınır şartlarından oluşan Sturm-Liouville probleminin çözümünü DDY ile inceleyelim. (6) denklemine DDY uygulanırsa,

$$\mathrm{Y}(\rho + 2) = \frac{-2\mathrm{Y}(\rho+1)}{(\rho+2)} \quad \rho = 0,1,2, \ldots$$

rekürans eşitlikleri elde edilir. Burada $y(0) = 0$ olduğu göz önüne alınarak $\mathrm{Y}(0) = 0$ elde edilir. $\mathrm{Y}(1) = \gamma$ olsun. O halde

ρ=0 için $\mathrm{Y}(2) = \frac{-2\mathrm{Y}(1)}{(2)} = -\mathrm{Y}(1) = -\gamma$

ρ=1 için $\mathrm{Y}(3) = \frac{-2\mathrm{Y}(2)}{3} = \frac{2}{3}\gamma$

ρ=2 için $\mathrm{Y}(4) = \frac{-2\mathrm{Y}(3)}{4} = \frac{-1\mathrm{Y}(3)}{2} = \frac{-1}{3}\gamma$

ρ=3 için $\mathrm{Y}(5) = \frac{-2\mathrm{Y}(4)}{5} = \frac{-2}{5}\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{2}{15}\gamma$

ρ =4 için $\mathrm{Y}(6) = \frac{-2\mathrm{Y}(5)}{6} = \frac{-1}{3}\mathrm{Y}(5) = \frac{-2}{45}\gamma$

ρ=5 için $\mathrm{Y}(7) = \frac{-2\mathrm{Y}(6)}{7} = \frac{-2}{7}\left(\frac{-2}{45}\gamma\right) = \frac{4\gamma}{315}$

ρ=6 için $\mathrm{Y}(8) = \frac{-2\mathrm{Y}(7)}{8} = \frac{-1}{4}\left(\frac{4\gamma}{315}\right) = \frac{-\gamma}{315}$

ρ=7 için $\mathrm{Y}(9) = \frac{-2\mathrm{Y}(8)}{9} = \frac{-2}{9}\left(\frac{-\gamma}{315}\right) = \frac{2\gamma}{2835}$

ρ=8 için $\mathrm{Y}(10) = \frac{-2\mathrm{Y}(9)}{10} = \frac{-1}{5}\left(\frac{2\gamma}{2835}\right) = \frac{-2\gamma}{14175}$

ρ=9 için $\mathrm{Y}(11) = \frac{-2\mathrm{Y}(10)}{11} = \frac{-2}{11}\left(\frac{-2\gamma}{14175}\right) = \frac{4\gamma}{155925}$

….

bulunur. Ayrıca ters diferansiyel dönüşüm yardımıyla

$$y(\mathrm{x}) = \sum_{\rho=0}^{\infty} Y(\rho) x^{\rho}$$

$$= \gamma \mathrm{x} - \gamma x^2 + \frac{2}{3}\gamma x^3 - \frac{1}{3}\gamma x^4 + \frac{2}{15}\gamma x^5 - \frac{2}{45}\gamma x^6 + \ldots$$

çözümü elde edilir. Bilinmeyen γ değeri ise $y(1) = 1$ sınır şartının kullanılmasıyla elde edilir.

Dolayısıyla

İlk 4 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma,\ \gamma = 1{,}5$$

Ilk 5 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma,\ \gamma = 3$$

Ilk 6 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\gamma,\ \gamma = 2{,}14285$$

Ilk 7 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\gamma - \frac{2}{45}\gamma,\ \gamma = 2{,}36842$$

Ilk 8 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\gamma - \frac{2}{45}\gamma + \frac{48}{315}\gamma,\ \gamma = 1{,}74033$$

Ilk 9 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\gamma - \frac{2}{45}\gamma + \frac{48}{315}\gamma + \frac{2}{2835}\gamma,\ \gamma = 1{,}7819$$

Ilk 10 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\gamma - \frac{2}{45}\gamma + \frac{48}{315}\gamma - \frac{2}{14175}\gamma,\ \gamma = 1{,}7386$$

İlk 11 terim için

$$1 = \gamma - \gamma + \frac{2}{3}\gamma - \frac{1}{3}\gamma + \frac{2}{15}\gamma - \frac{2}{45}\gamma + \frac{48}{315}\gamma - \frac{2}{14175}\gamma + \frac{4}{155925}\gamma,\ \gamma = 1{,}7385$$

elde edilir. Buradan aranılan γ değeri için $\gamma = 1.7385$ seçimi yapılabilir.

Bu değer bulunan çözümde yerine yazıldığında DDY çözümü

$$y(\mathrm{x}) = 1{,}7385\left[x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{2}{45}x^6 + \ldots\right]$$

biçiminde ifade edilir.

3.1.2. Örnek

$$\mathrm{y}''(\mathrm{x}) - 3\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{x} = 0$$

homojen olmayan Sturm-Liouville denkleminden ve

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

başlangıç şartlarından oluşan probleme DDY uygulayalım. Bu problemin kesin çözümü

$$y(\mathrm{x}) = 6 - 6e^x + 4x + 3e^x x$$

dır. DDY' yi diferansiyel denkleme uygularsak

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{y}''(\mathrm{x}) - 3\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{x}\} = 0$$

eşitliğinden

$$\mathrm{Y}(\rho + 2) = \frac{3}{(\rho+1)(\rho+2)}\sum_{\mathrm{r}=0}^{\rho}\frac{\delta(\mathrm{r}-1)}{(\rho-\mathrm{r})!}, \ \rho = 0,1,2,\ldots$$

eşitlikleri elde edilir.

Başlangıç şartına DDY uygulayarak $\mathrm{Y}(0) = 0, \mathrm{Y}(1) = 1$ elde edilir. O halde

$$\mathrm{Y}(2) = 0$$

$$\mathrm{Y}(3) = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{r}=0}^{1}\frac{\delta(\mathrm{r}-1)}{(1-\mathrm{r})!} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Y}(4) = \frac{1}{4}\sum_{\mathrm{r}=0}^{2}\frac{\delta(\mathrm{r}-1)}{(2-\mathrm{r})!} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{Y}(5) = \frac{3}{20}\sum_{\mathrm{r}=0}^{3}\frac{\delta(\mathrm{r}-1)}{(3-\mathrm{r})!} = \frac{3}{40}$$

$$\mathrm{Y}(6) = \frac{3}{30}\sum_{\mathrm{r}=0}^{4}\frac{\delta(\mathrm{r}-1)}{(4-\mathrm{r})!} = \frac{1}{60}$$

$$Y(7)=\frac{3}{6.7}\sum_{r=0}^{5}\frac{\delta(r-1)}{(5-r)!}=\frac{1}{14}.\frac{1}{24}=\frac{1}{336}$$

$$Y(8)=\frac{3}{7.8}\sum_{r=0}^{6}\frac{\delta(r-1)}{(6-r)!}=\frac{3}{56}.\frac{1}{5!}=\frac{1}{2240}$$

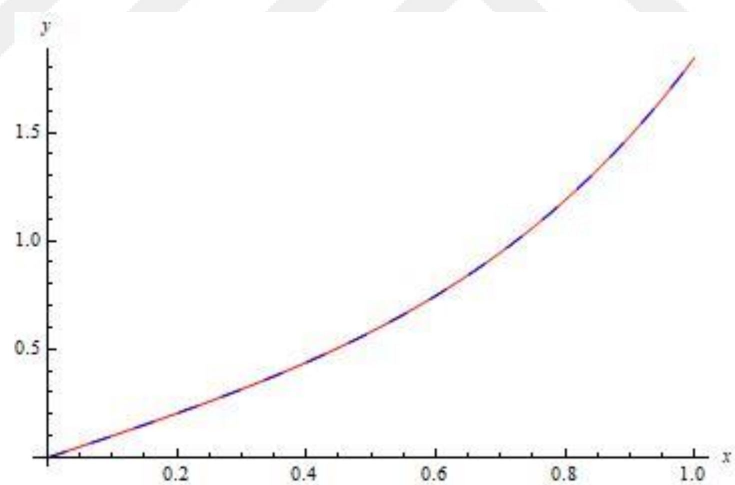
$$Y(9)=\frac{3}{8.9}\sum_{r=0}^{7}\frac{\delta(r-1)}{(7-r)!}=\frac{1}{24}.\frac{1}{6!}=\frac{1}{17280}$$

bulunur. Böylece başlangıç değer probleminin DDY çözümü

$$y(x)=\sum_{\rho=0}^{\infty}Y(\rho)\,x^{\rho}=Y(0)+Y(1)x+Y(2)x^{2}+\cdots$$

$$=x+\tfrac{1}{2}x^{3}+\tfrac{1}{4}x^{4}+\tfrac{3}{40}x^{5}+\tfrac{1}{60}x^{6}+\tfrac{1}{336}x^{7}+\tfrac{1}{2240}x^{8}$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 3.1. DDY Çözümü (mavi çizgi) ile Kesin Çözümünün (kırmızı çizgi) Karşılaştırılması

3.2. İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Sturm-Liouville Denklemi için Sınır-Değer Probleminin DDY ile Çözümü

3.2.1. Örnek

$$y''(x) - 2y'(x) + y^2(x) = x + 1 \tag{7}$$

diferansiyel denkleminden ve

$$y(0) = 8, \qquad y(1) = 2$$

sınır şartlarından oluşan probleme DDY uygulayalım. İlk olarak (7) denklemindeki ifadeye DDY uygularsak

$$D_D\{y''\} = (\rho + 1)(\rho + 2)Y(\rho + 2)$$

$$D_D\{-2y'\} = -2(\rho + 1)Y(\rho + 1)$$

$$D_D\{y^2\} = \sum_{r=0}^{\rho} Y(r)Y(\rho - r)$$

$$D_D\{x\} = \delta(\rho - 1)$$

$$D_D\{1\} = \delta(\rho)$$

elde ederiz. Dolayısıyla düzenleme yapıldığında

$$Y(\rho + 2) = \frac{2Y(\rho + 1)}{(\rho + 2)} + \frac{1}{(\rho + 1)(\rho + 2)}\left[-\sum_{r=0}^{\rho} Y(r)Y(\rho - r) + \delta(\rho - 1) + \delta(\rho)\right], \rho = 0,1, ..$$

elde edilir. İlk sınır şartından $Y(0) = 8$ elde edilir. Dolayısıyla $Y(1) = a$ olsun. O halde ard- arda

$$Y(2) = \tfrac{2Y(1)}{2} + \tfrac{1}{2}[-Y(0)Y(0) + 1]$$

$$= Y(1) + \tfrac{1}{2}[-63]$$

$$= a - \tfrac{63}{2}$$

$$Y(3) = \frac{2Y(2)}{3} + \frac{1}{2.3}\left[-\sum_{r=0}^{1} Y(r)Y(1 - r) + 1\right]$$

$$= \tfrac{2}{3}\left(a - \tfrac{63}{2}\right) + \tfrac{1}{6}[-Y(0)Y(1) - Y(1)Y(0) + 1]$$

$$= \frac{2}{3}\left(a - \frac{63}{2}\right) + \frac{1}{6}[-8a - 8a + 1]$$

$$= \frac{-12a-125}{6}$$

$$Y(4) = \frac{2Y(3)}{4} + \frac{1}{3.4}\left[-\sum_{r=0}^{2} Y(r)Y(2-r) + 0\right]$$

$$= \frac{2Y(3)}{4} + \frac{1}{12}[-Y(0)Y(2) - Y(1)Y(1) - Y(2)Y(0)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-12a-125}{6}\right) + \frac{1}{12}\left[-8\left(a - \frac{63}{2}\right).2 - a^2\right]$$

$$= \frac{1}{12}[-28a + 379 - a^2]$$

$$Y(5) = \frac{2Y(4)}{5} + \frac{1}{4.5}\left[-\sum_{r=0}^{3} Y(r)Y(3-r)\right]$$

$$= \frac{2Y(4)}{5} + \frac{-1}{20}[2Y(0)Y(3) + 2Y(1)Y(2)]$$

$$= \frac{2}{5}Y(4) + \frac{-1}{10}\left[8\left(\frac{-12a-125}{6}\right) + a\left(a - \frac{63}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{40a-253-8a^2}{60}$$

eşitliklerini elde ederiz.

Bu şekilde devam edildiğinde ters dönüşüm kullanılarak

$$y(x) = D_D^{-1}\{Y(\rho)\}x^{\rho}$$

$$= 8 + ax + \left(a - \frac{63}{2}\right)x^2 + \left(\frac{-12a-125}{6}\right)x^3 + \frac{1}{12}[-28a + 379 - a^2]x^4$$

$$+ \frac{1}{60}[40a - 253 - 8a^2]x^5$$

elde edilir. $y(1) = 2$ olduğu kullanılarak a değeri bulunabilir.

3.3. İkinci Mertebeden Lineer Homojen Olmayan Diferansiyel Denklem için Sınır-Değer Problemlemlerinin DDY ile Çözümü

3.3.1. Örnek

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = x + 1,$$

diferansiyel denkleminden ve

$$y(0) = 8, y'(0) = 2$$

başlangıç şartlarından oluşan probleme DDY uygulayalım.

Problemin kesin çözümü

$$y(x) = \frac{47}{18}e^{3x} + \frac{99}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

şeklindedir. DDY′ yi diferansiyel denkleme uygularsak

$$D_D\{y'' - 2y'(x) - 3y(x)\} = D_D\{x + 1\}$$

yazılır. Dolayısıyla,

$$Y(\rho + 2) = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)}[\delta(\rho - 1) + \delta(\rho) + 3Y(\rho) + 2(\rho + 1)Y(\rho + 1)], \quad \rho = 0,1,2, \dots$$

elde edilir. Başlangıç şartına DDY uygulandığında $Y(0) = 8, Y(1) = 2$ değerleri bulunur.

O halde

$$Y(2) = \frac{1}{2}[1 + 3Y(0) + 2Y(1)] = \frac{1}{2}[1 + 24 + 4] = \frac{29}{2}$$

$$Y(3) = \frac{1}{6}[1 + 3Y(1) + 4Y(2)] = \frac{1}{6}[1 + 6 + 58] = \frac{65}{6}$$

$$Y(4) = \frac{1}{12}[3Y(2) + 6Y(3)] = \frac{1}{12}\left[3.\frac{29}{2} + 6.\frac{65}{6}\right] = \frac{217}{24}$$

$$Y(5) = \frac{1}{20}[3Y(3) + 8Y(4)] = \frac{1}{20}\left[3.\frac{65}{6} + 8.\frac{217}{24}\right] = \frac{629}{120}$$

$$Y(6) = \frac{1}{30}[3Y(4) + 10Y(5)] = \frac{1}{30}\left[\frac{217}{8} + \frac{629}{12}\right] = \frac{1909}{720}$$

…

değerleri bulunur. Böylece çözüm ters diferansiyel dönüşüm ile

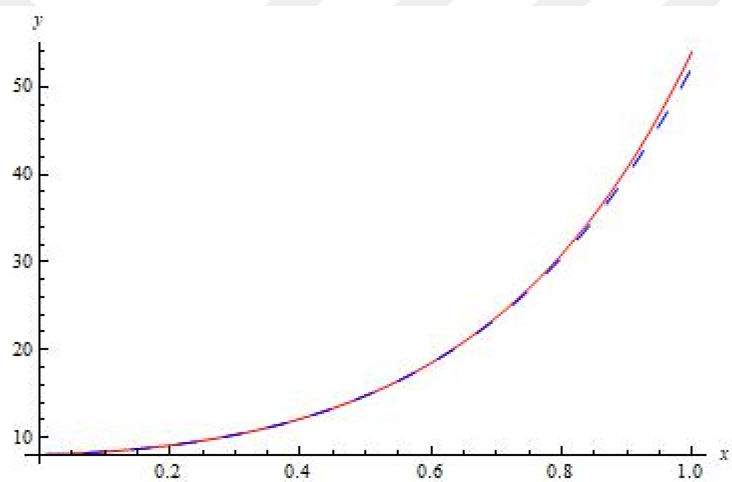
$$y(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} \mathrm{Y}(\rho) x^{\rho}$$

$$= 8 + 2x + \frac{29}{2}x^2 + \frac{65}{6}x^3 + \frac{217}{24}x^4 + \frac{629}{120}x^5 + \frac{1909}{720}x^6 + \cdots$$

biçiminde elde edilir. Bu çözümü düzenlersek, DDY çözümü

$$y(\mathrm{x}) = \frac{47}{18}\left[1 + 3\mathrm{x} + \frac{(3\mathrm{x})^2}{2!} + \frac{(3\mathrm{x})^3}{3!} \ldots\right] + \frac{99}{18}\left[1 - \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} - \frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \frac{\mathrm{x}^4}{4!} - \ldots\right] - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 3.2. DDY Çözümü (mavi çizgi) ile Kesin Çözümünün (kırmızı çizgi) Karşılaştırılması

3.3.2. Örnek

$$y''(\mathrm{x}) + 3\,y(\mathrm{x}) = x^2 + 1$$

diferansiyel denklemden ve

$$y(0) = 1,\; y'(0) = 2$$

başlangıç şartlarından oluşan probleme DDY uygulayalım.

Problemin kesin çözümü

$$y(\mathrm{x}) = \frac{1}{9}\left[1 + 3x^2 + 8\cos(\sqrt{3}\mathrm{x}) + 6\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}\mathrm{x})\right]$$

dır. DDY′ yi diferansiyel denkleme uygularsak

$$\{\mathrm{D_D y''(x) + 3y(x)}\} = \{\mathrm{x}^2 + 1\}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$Y(\rho+2)=\frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)}[\delta(\rho-2)+\delta(\rho)-3Y(\rho)], \qquad \rho=0,1,2\ldots$$

şeklindeki ifade elde edilir. DDY uygulandığında $Y(0)=1$ ve

$Y(1)=2$ elde edilir. O halde art-arda

$$Y(2)\ =\frac{1}{1.2}[1-3Y(0)]=\frac{1}{2}[1-3]=-1$$

$$Y(3)\ =\frac{1}{2.3}[-3Y(1)]=-1$$

$$Y(4)\ =\frac{1}{3.4}[1-3Y(2)]=\frac{1}{12}[1+3]=\frac{1}{3}$$

$$Y(5)\ =\frac{1}{4.5}[-3Y(3)]=\frac{1}{20}[3]=\frac{3}{20}$$

$$Y(6)\ =\frac{1}{5.6}[-3Y(4)]=\frac{-3}{30}\frac{1}{3}=\frac{-1}{30}$$

$$Y(7)\ =\frac{1}{6.7}[-3Y(5)]=\frac{-1}{14}\frac{3}{20}=\frac{-3}{280}$$

$$Y(8)\ =\frac{1}{7.8}[-3Y(6)]=\frac{-3}{56}\frac{-1}{30}=\frac{1}{560}$$

$$Y(9)\ =\frac{1}{8.9}[-3Y(7)]=\frac{-1}{24}\frac{-3}{280}=\frac{1}{2240}$$

$$Y(10)\ =\frac{1}{9.10}[-3Y(8)]=\frac{-1}{30}\frac{1}{560}=-\frac{1}{16800}$$

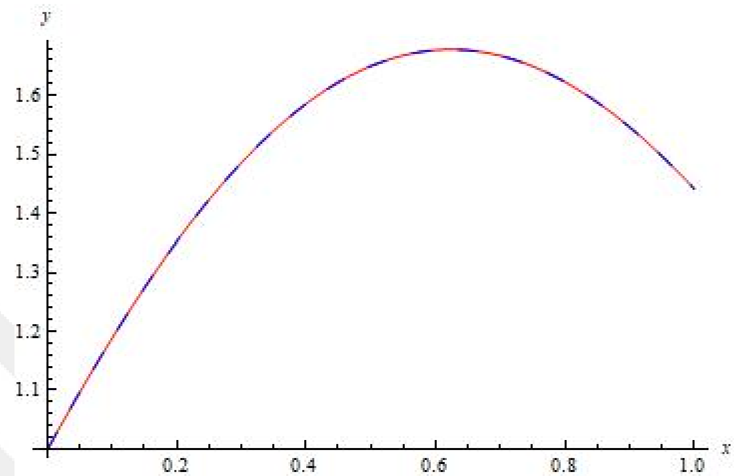
bulunur. Böylece ters diferansiyel dönüşüm ile

$$y(\mathrm{x})=\sum_{\rho=0}^{\infty}Y(\rho)\,x^{\rho}$$

$$=Y(0)+Y(1)x+Y(2)x^2+Y(3)x^3+\cdots$$

$$=1+2x-x^2-x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{3}{20}x^5-\frac{1}{30}x^6-\frac{3}{280}x^7+\frac{1}{560}x^8+\frac{1}{2240}x^9-\frac{1}{16800}x^{10}+\cdots$$

elde edilir.



Şekil 3.3. DDY Çözümü (mavi çizgi) ile Kesin Çözümünün (kırmızı çizgi) Karşılaştırılması

3.3.3. Örnek

$$y''(x) - y(x) - 2e^{x}x + e^{x} = 0$$

diferansiyeli denkleminden ve

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

başlangıç şartından oluşan probleme DDY uygulayalım.

Bu problemin kesin çözümü

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x}(2 - 2x + x^{2})$$

dır. DDY yi diferansiyel denkleme uygularsak

$$Y(\rho + 2) = \frac{1}{(\rho+1)(\rho+2)}\left[Y(\rho) + 2\sum_{r=0}^{\rho}\frac{\delta(r-1)}{(\rho-r)!} - \frac{1}{\rho!}\right], \rho = 0,1,2,\ldots$$

elde edilir. Başlangıç şartına uygulayarak

$Y(0) = 1, Y(1) = 0$ elde edilir.

$$\rho = 0 \text{ için } Y(2) = \frac{1}{2}[Y(0) - 1] = 0$$

$$\rho = 1 \text{ için } Y(3) = \frac{1}{6}\left[Y(1) + 2\sum_{r=0}^{1}\frac{\delta(r-1)}{(1-r)!} - 1\right] = \frac{1}{6}$$

$$\rho = 2 \text{ için } \ Y(4) = \frac{1}{12}\left[Y(2) + 2\sum_{r=0}^{2} \frac{\delta(r-1)}{(2-r)!} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}$$

$$\rho = 3 \text{ için } \ Y(5) = \frac{1}{20}\left[Y(3) + 2\sum_{r=0}^{3} \frac{\delta(r-1)}{(3-r)!} - \frac{1}{3!}\right] = \frac{1}{20}$$

$$\rho = 4 \text{ için } \ Y(6) = \frac{1}{30}\left[Y(4) + 2\sum_{r=0}^{4} \frac{\delta(r-1)}{(4-r)!} - \frac{1}{4!}\right] = \frac{1}{72}$$

$$\rho = 5 \text{ için } \ Y(7) = \frac{1}{42}\left[Y(5) + 2\sum_{r=0}^{5} \frac{\delta(r-1)}{(5-r)!} - \frac{1}{5!}\right] = \frac{1}{336}$$

$$\rho = 6 \text{ için } Y(8) = \frac{1}{56}\left[Y(6) + 2\sum_{r=0}^{6} \frac{\delta(r-1)}{(6-r)!} - \frac{1}{6!}\right] = \frac{1}{1920}$$

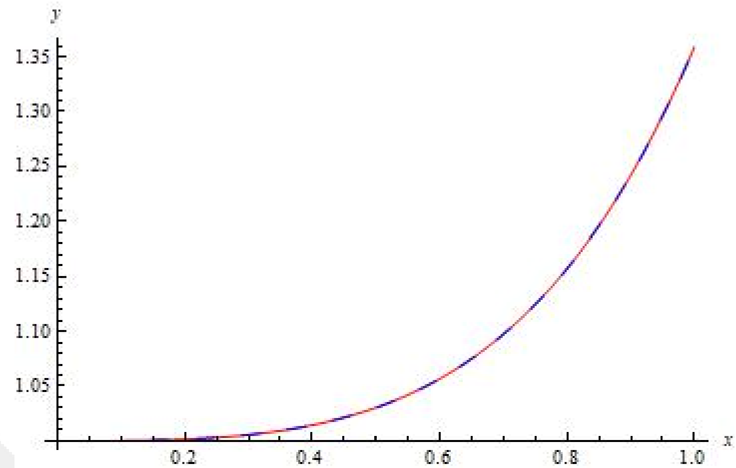
$$\rho = 7 \text{ için } \ Y(9) = \frac{1}{72}\left[Y(7) + 2\sum_{r=0}^{7} \frac{\delta(r-1)}{(7-r)!} - \frac{1}{7!}\right] = \frac{1}{72180}$$

elde edilir. Sonuç olarak ele alınan problemin DDY çözümü

$$y(x) = \sum_{\rho=0}^{\infty} Y(\rho)\, x^{\rho} = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{20}x^5 + \tfrac{1}{72}x^6 + \tfrac{1}{336}x^7 + \tfrac{1}{1920}x^8 + \cdots$$

şeklinde bulunur.



Şekil 3.4. DDY Çözümü (mavi çizgi) ile Kesin Çözümünün (kırmızı çizgi) Karşılaştırılması

4.BÖLÜM

İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

4.1. İki Boyutlu DDY' nin tanım ve özellikleri

Tanım 4.1. (Ayaz, 2003) İki değişkenli m(x,y) fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü M(a,b) olmak üzere

$$D_D\{m(x,y)\} = M(a,b)$$
$$= \frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a\,\partial y^b} m(x,y\right]_{x=x_0 y=y_0}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Tanım 4.2. (Ayaz, 2003) M(a,b) nin ters diferansiyel dönüşümü

$$D_D^{-1}\{M(a,b)\} = m(x,y) = \sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty} M(a,b)(x-x_0)^a(y-y_0)^b$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1. (Ayaz, 2003) Bir $m(x,y)$ nin x'e göre türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\{m_x(x,y)\} = (a+1)M(a+1,b)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$D_D\left\{\frac{\partial}{\partial x} m(x,y)\right\} = \frac{1}{a!b!}\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a\,\partial y^b}\left[\frac{\partial}{\partial x} m(x,y)\right]_{x=x_0 y=y_0}$$
$$= \frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+1+b}}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b} m(x,y)\right]$$
$$= (a+1)M(a+1,b)$$

yazılır.

Teorem 4.2. (Ayaz, 2003) $m(x,y)$ y ye göre türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{\partial}{\partial x} m(x,y)\right\} = (b+1)M(a,b+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$D_D\left\{\frac{\partial}{\partial y}m(x,y)\right\}=\frac{1}{a!\,b!}\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a\,\partial y^b}[\frac{\partial}{\partial y}m(x,y)]_{x=x_0y=y_0}$$

$$=\frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+1+b}}{\partial x^a\,\partial y^{b+1}}\{m(x,y)\}\right]_{x=x_0y=y_0}$$

$$=(b+1)\frac{1}{(a!)(b+1)!}\left[\frac{\partial^{a+1+b}}{\partial x^a\,\partial y^{b+1}}m(x,y)\right]_{x=x_0y=y_0}$$

$$=(b+1)M(a,b+1)$$

Teorem 4.3. (Ayaz, 2003) Bir $m(x,y)$ nin x'e göre ikinci mertebeden türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(x,y)\right\}=(a+1)(a+2)M(a+2,h)=\frac{(a+2)!}{(a)!}M(a+2,b)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$D_D\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(x,y)\right\}=\frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a\,\partial y^b}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(x,y)\right\}\right]_{x=x_0y=y_0}$$

$$=\frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+2+b}}{\partial x^{a+2}\,\partial y^b}m(x,y)\right]_{x=x_0y=y_0}$$

$$=\frac{(a+2)!}{a!}M(a+2,b)$$

$$=(a+1)(a+2)M(a+2,b)$$

Teorem 4.4. (Ayaz, 2003) Bir $m(x,y)$ fonksiyonun y'ye göre ikinci mertebeden kısmi türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}m(x,y)\right\}=(b+1)(b+2)M(a,b+2)$$

$$=\frac{(b+2)!}{(b)!}M(a,b+2)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $D_D\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}m(x,y)\right\} = \frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a\,\partial y^b}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}m(x,y)\right\}\right]_{x=x_0 y=y_0}$

$$= \frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+2+b}}{\partial x^a\,\partial y^{b+2}}m(x,y)\right]_{x=x_0 y=y_0}$$

$$= \frac{(b+2)!}{b!}M(a,b+2)$$

$$= (b+1)(b+2)M(a,b+2)$$

Genelleştirme yapmak gerekirse,

1.Durum $m(x,y)$ fonksiyonunun x'e göre r mertebeden türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{\partial^r}{\partial x^r}m(x,y)\right\} = (a+1)(a+2)\ldots(a+r)M(a+r,b) = \frac{(a+r)!}{a!}M(a+r,b)$$

eşitliği sağlanır.

2.Durum $m(x,y)$ fonksiyonunun y ye göre s mertebeden türevinin diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{\partial^s}{\partial y^s}m(x,y)\right\} = (b+1)(b+2)\ldots(b+r)M(a,b+s) = \frac{(b+s)!}{b!}M(a,b+s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.5. (Ayaz, 2003) Bir $m_{xy}(x,y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü için

$$D_D\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}m(x,y)\right\} = (a+1)(b+1)M(a+1,b+1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $D_D\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}m(x,y)\right\} = \frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+b}}{\partial x^a\,\partial y^b}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}m(x,y)\right\}\right]_{x=x_0 y=y_0}$

$$= \frac{1}{a!b!}\left[\frac{\partial^{a+1+b+1}}{\partial x^{a+1}\,\partial y^{b+1}}m(x,y)\right]_{x=x_0 y=y_0}$$

$$= \frac{(a+1)!}{a!}\frac{(b+1)!}{(b)!}\frac{1}{(a+1)!(b+1)!}\left[\frac{\partial^{a+1+b+1}}{\partial x^{a+1}\,\partial y^{b+1}}m(x,y)\right]_{x=x_0 y=y_0}$$

$$= \frac{(a+1)!}{a!}\frac{(b+1)!}{b!}M(a+1,b+1) = (a+1)(b+1)M(a+1,b+1)$$

Teorem 4.6. (Ayaz, 2003) r,s ∈ N olmak üzere

$$D_D\left\{\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\mathrm{m}(x,y)\right\} = (a+1)(a+2)\ldots(a+\mathrm{r})(\mathrm{b}+1)(\mathrm{b}+2)\ldots(\mathrm{b}+s)\mathrm{M}(a+\mathrm{r},\mathrm{b}+\mathrm{s})$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\mathrm{D_D}\left\{\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r+s}}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{r}}\,\partial \mathrm{y}^{\mathrm{s}}}\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right\} = \frac{1}{\mathrm{a!b!}}\left[\frac{\partial^{\mathrm{a+b}}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{a}}\,\partial \mathrm{y}^{\mathrm{b}}}\left\{\frac{\partial^{\mathrm{r+s}}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{r}}\,\partial \mathrm{y}^{\mathrm{s}}}\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right\}\right]_{\mathrm{x=x_0 y=y_0}}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{\rho!h!}}\left[\frac{\partial^{\mathrm{a+r+b+s}}}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{a+r}}\,\partial \mathrm{y}^{\mathrm{b+s}}}\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right]_{\mathrm{x=x_0 y=y_0}}$$

$$= (\mathrm{a}+1)(\mathrm{a}+2)\ldots(\mathrm{a}+\mathrm{r})(\mathrm{b}+1)(\mathrm{b}+2)\ldots(\mathrm{b}+\mathrm{s})\mathrm{M}(\mathrm{a}+\mathrm{r},\mathrm{b}+\mathrm{s})$$

Teorem 4.7. (Ayaz, 2003) $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\ \mathrm{n_x}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü için

$$\mathrm{D_D}\left\{\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial \mathrm{n}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}\right\} = \sum_{r=0}^{a}\sum_{s=0}^{b}\ (a-\mathrm{r}+1)\mathrm{M}(\mathrm{r},b-s)\mathrm{N}(a-\mathrm{r}+1,\mathrm{s})$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$\mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{\partial \mathrm{n}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}$ olsun. Bu durumda $\mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ fonksiyonunun Teorem 4.2 ye göre diferansiyel dönüşümü

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\} = \mathrm{D_D}\left\{\frac{\partial \mathrm{n}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}}\right\} = \mathrm{Q}(\mathrm{a},\mathrm{b}) = (\mathrm{a}+1)\mathrm{N}(\mathrm{a}+1,\mathrm{b})$$

şeklinde ifade edilerek

$$\mathrm{D_D}\{\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\} = \sum_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{s}=0}^{\mathrm{b}}\mathrm{M}(\mathrm{r},\mathrm{b}-\mathrm{s})\mathrm{Q}(\mathrm{a}-\mathrm{r},\mathrm{s})$$

sonucuna ulaşılır. $\mathrm{Q}(\mathrm{a}-\mathrm{r},\mathrm{s}) = (\mathrm{a}-\mathrm{r}+1)\mathrm{N}(\mathrm{a}-\mathrm{r}+1,\mathrm{s})$ olacağından bu ifade son eşitlikte yerine yazıldığında istenilen bulunur.

Teorem 4.8. (Ayaz, 2003) $\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{n}_{\mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ fonksiyonun diferansiyel dönüşümü için

$$\mathrm{D_D}\left\{\mathrm{m}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial^2\mathrm{n}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial\mathrm{x}^2}\right\}=\sum_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{a}}\sum_{\mathrm{s}=0}^{\mathrm{b}}(\mathrm{a}-\mathrm{r}+1)(\mathrm{a}-\mathrm{r}+2)\mathrm{M}(\mathrm{r},\mathrm{b}-\mathrm{s})\mathrm{N}(\mathrm{a}-\mathrm{r}+2,\mathrm{s})$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\mathrm{D}_D\{q(x,y)\}=\mathrm{D}_D\left\{\frac{\partial^2 n(x,y)}{\partial x^2}\right\}=Q(a,b)=(a+1)(a+2)\mathrm{N}(a+2,b)$$

yazılabilir. İki fonksiyonunun çarpımının diferansiyel dönüşümünden

$$D_D\{\mathrm{m}(x,y)q(x,y)\}=\sum_{r=0}^{a}\sum_{s=0}^{b}\mathrm{M}(\mathrm{r},b-s)\mathrm{Q}(a-\mathrm{r},s)$$

sonucuna varılır. Dolayısıyla $Q(a-r,s)=(a-r+1)(a-r+2)N(a-r+2,s)$ ifadesi son eşitlikte yerine yazıldığında istenilen bulunmuş olur.

5.BÖLÜM
İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN BAZI UYGULAMALARI

5.1. Örnek

Aşağıda verilen problemi DDY ile çözelim.

$y = y(x,t), \quad x \in R, \quad t \geq 0$ olmak üzere,

$$\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}, 0) = -\mathrm{x}^2$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Verilen problemin açık çözümü

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = -(\mathrm{t} - \mathrm{x})^2$$

şeklindedir. Diferansiyel denkleme iki boyutlu DDY uygulandığı taktirde

$$(\mathrm{h}+1)\mathrm{Y}(\rho, \mathrm{h}+1) + (\rho+1)\mathrm{Y}(\rho+1, \mathrm{h}) = 0$$

bulunur. Düzenleme yapılırsa

$$\mathrm{Y}(\rho, \mathrm{h}+1) = -\tfrac{\rho+1}{\mathrm{h}+1}\mathrm{Y}(\rho+1, \mathrm{h})$$

elde edilir. Problemde verilen başlangıç şartına dönüşüm uygulandığında

$$\mathrm{Y}(\rho, 0) = \begin{cases} -1, & \rho = 2 \text{ olması durumunda} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. $\mathrm{Y}(\rho, 0)$ değeri rekürans denkleminde kullanılarak sırası ile $\rho = 0,1,2,\ldots$ için $\mathrm{Y}(\rho, \mathrm{h})$ değeri hesaplandığında

$\mathrm{h} = 0$ iken

$\rho = 0$ için $\mathrm{Y}(0,1) = -1\mathrm{Y}(1,0) = 0$

$\rho = 1$ için $\mathrm{Y}(1,1) = -2\,\mathrm{Y}(2,0) = 2$

$\rho = 2$ için $\mathrm{Y}(2,1) = -3\,\mathrm{Y}(3,0) = 0$

$\rho = 3$ için $\mathrm{Y}(3,1) = -4\,\mathrm{Y}(4,0) = 0$

....

$\mathrm{h} = 1$ iken

$\rho = 0$ için $Y(0,2) = -\frac{1}{2}Y(1,1) = -1$

$\rho = 1$ için $Y(1,2) = -\frac{2}{2}Y(2,1) = 0$

$\rho = 2$ için $Y(2,2) = -\frac{3}{2}Y(3,1) = 0$

$\rho = 3$ için $Y(3,2) = -\frac{4}{2}Y(4,1) = 0$

$$Y(\rho, h) = \begin{cases} -1, & \rho = 0, \ h = 2 \\ 2, & \rho = 1, \ h = 1 \\ 0, & \rho, h \text{ diğer durumları için} \end{cases}$$

bulunur. Ters diferansiyel dönüşüm yardımıyla

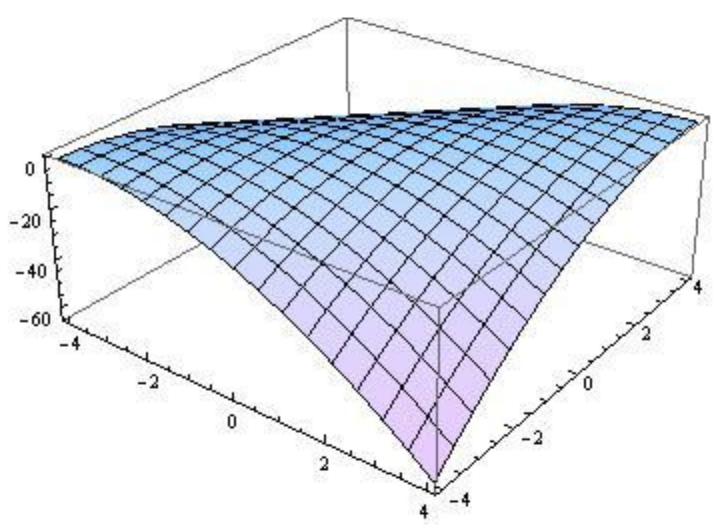
$$Y(x,t) = \sum_{\rho=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} Y(\rho, h)x^{\rho}t^{h}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\sum_{\rho=0}^{2} Y(\rho,0)x^{\rho} + Y(\rho,1)x^{\rho}t + Y(\rho,2)x^{\rho}t^{2} = Y(0.0) + Y(0.1)t + Y(0.2)t^{2} + Y(1,0)x + Y(1,1)xt$$

$$+Y(1,2)xt^{2} + Y(2,0)x^{2} + Y(2,1)x^{2}t + Y(2,2)x^{2}t^{2} = -t^{2} + 2xt + -x^{2}$$

bulunur.



Şekil 5.1 Problemin Kesin Çözümünün Grafiği

5.2. Örnek

Aşağıda verilen

$$\frac{\partial \mathrm{y(x,t)}}{\partial \mathrm{t}} + 2\frac{\partial \mathrm{y(x,t)}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{y(x,t)}, \quad \mathrm{t} \geq 0, \qquad \mathrm{x} \in \mathrm{R}$$

$$y(\mathrm{x},0) = x^2$$

başlangıç değer problemini iki boyutlu DDY ile çözelim.

Verilen problemin açık çözümü $y(x,t)$=$e^t(2t-x)^2$ dir. Diferansiyel denkleme diferansiyel dönüşüm uyguladığı taktirde

$$(\mathrm{h}+1)\mathrm{Y}(\rho,\mathrm{h}+1) + 2(\rho+1)\mathrm{Y}(\rho+1,\mathrm{h}) = \mathrm{Y}(\rho,\mathrm{h})$$

elde edilir.

Problemde verilen başlangıç şartına dönüşüm uygulanırsa

$$Y(\rho,0) = \begin{cases} 1, & \rho = 2 \\ 0, & \rho \text{ nın diğer durumları için} \end{cases}$$

bulunur.

$Y(\rho,\mathrm{h})$ değeri hesaplandığında

$\mathrm{h} = 0$ için art-arda

$$\mathrm{Y}(0{,}1) + 2\mathrm{Y}(1{,}0) = \mathrm{Y}(0{,}0), \qquad \mathrm{Y}(0{,}1) = 0$$

$$\mathrm{Y}(1{,}1) + 4\mathrm{Y}(2{,}0) = \mathrm{Y}(1{,}0), \qquad \mathrm{Y}(1{,}1) = -4$$

$$\mathrm{Y}(2{,}1) + 6\mathrm{Y}(3{,}0) = \mathrm{Y}(2{,}0), \qquad \mathrm{Y}(2{,}1) = 1$$

$$\mathrm{Y}(3{,}1) + 8\mathrm{Y}(4{,}0) = \mathrm{Y}(3{,}0), \qquad \mathrm{Y}(3{,}1) = 0$$

$$\mathrm{Y}(4{,}1) + 10\mathrm{Y}(5{,}0) = \mathrm{Y}(4{,}0), \qquad \mathrm{Y}(4{,}1) = 0$$

$$\mathrm{Y}(5{,}1) + 12\mathrm{Y}(6{,}0) = \mathrm{Y}(5{,}0), \qquad \mathrm{Y}(5{,}1) = 0$$

eşitlikleri

h=1 iken art-arda

$$2\mathrm{Y}(0{,}2) + 2\mathrm{Y}(1{,}1) = \mathrm{Y}(0{,}1), \qquad \mathrm{Y}(0{,}2) = 4$$

$$2\mathrm{Y}(1{,}2) + 4\mathrm{Y}(2{,}1) = \mathrm{Y}(1{,}1), \qquad \mathrm{Y}(1{,}2) = -4$$

$$Y(2,2) + 6Y(3,1) = Y(2,1), \qquad Y(2,2) = \frac{1}{2}$$

$$2Y(3,2) + 8Y(4,1) = Y(3,1), \qquad Y(3,2) = 0$$

eşitlikleri

$h = 2$ iken art-arda

$$3Y(0,3) + 2Y(1,2) = Y(0,2), \qquad Y(0,3) = 4$$

$$3Y(1,3) + 4Y(2,2) = Y(1,2), \qquad Y(1,3) = -2$$

$$3Y(2,3) + 6Y(3,2) = Y(2,2), \qquad Y(2,2) = \frac{1}{6}$$

$$2Y(3,2) + 8Y(4,1) = Y(3,2), \qquad Y(3,2) = 0$$

eşitlikleri

$h = 3$ iken art-arda

$$4Y(0,3) + 2Y(1,3) = Y(0,3), \qquad Y(0,4) = 2$$

$$4Y(1,4) + 4Y(2,3) = Y(1,3), \qquad Y(1,4) = \frac{-2}{3}$$

$$4Y(2,4) + 6Y(3,3) = Y(2,3), \qquad Y(2,4) = \frac{1}{24}$$

$$4Y(3,4) + 8Y(4,3) = Y(3,3), \qquad Y(3,4) = 0$$

eşitlikleri bulunur. Buradan DDY çözümü

$$y(x,t) = \sum_{\rho=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} Y\,(\rho,\mathrm{h})x^{\rho}t^{h}$$

$$= \textstyle\sum_{\rho=0}^{\infty} x^{\rho}[Y(\rho,0) + Y(\rho,1)\mathrm{t} + Y(\rho,2)t^2 + Y(\rho,3)t^3 + \ldots]$$

$$= [Y(0{,}0) + Y(0{,}1)\mathrm{t} + Y(0{,}2)t^2 + Y(0{,}3)t^3 + \cdots]$$

$$+[Y(1{,}0)\mathrm{x} + Y(1{,}1)\mathrm{xt} + Y(1{,}2)\mathrm{x}t^2 + Y(1{,}3)\mathrm{x}t^3 + \cdots] +$$

$$+[Y(2{,}0)x^2 + Y(2{,}1)\mathrm{t}x^2 + Y(2{,}2)x^2t^2 + Y(2{,}3)x^2t^3 + \ldots]$$

$$+[Y(3{,}0)x^3 + Y(3{,}1)\mathrm{t}x^{,3} + Y(3{,}2)t^2x^3 + Y(3{,}3)t^3x^3 + \ldots] + \ldots$$

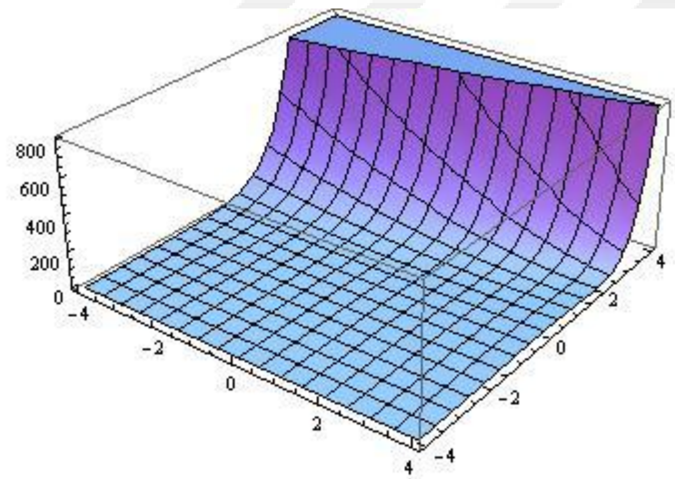
$$= [4t^2 + 4t^3 + 2t^4 + \ldots] + \left[-4\mathrm{xt} - 4\mathrm{xt}^2 - 2xt^3 - \tfrac{2}{3}xt^4 + \ldots\right]$$

$$+\left[\mathrm{x}^2 + t\mathrm{x}^2 + \tfrac{1}{2}t^2 + \dots\right] - 4xt\left(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \dots\right)$$

$$+\mathrm{x}^2\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \dots\right) + \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \dots\right)(4t^2 - 4xt + x^2)$$

$$= e^t(2t - x)^2$$

biçiminde elde edilir.



Şekil 5.2 Problemin Kesin Çözümünün Grafiği

SONUÇ

DDY, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır-değer problemlerine uygulanması açısından çok pratik ve etkili bir yöntemdir. Yöntemin keyfi alınan mertebeden lineer ve non-lineer adi ve adi olmayan denklemlerinin hem yaklaşık çözümü hem de kesin çözümlerini bulmak için kullanışlı olduğu görülmüştür. Bu çalışmada bir boyutlu ve iki boyutlu DDY incelenmiştir. Yöntem sonucunda cebirsel denklemler elde edildiği için kolaylıkla bilgisayar programlarında hesaplanarak çözümler bulunur. Çeşitli problemlerin kesin çözümleri ile DDY ile elde edilen çözümleri için grafiksel karşılaştırma yapılmıştır.

KAYNAKÇA

Abuteen, E., Momani, S., & Alawneh, A. (2014). *Solving the fractional nonlinear Bloch system using the multi-step generalized differential transform method*. Computers & Mathematics with Applications, *68*(12), 2124-2132.

Arikoglu, A., & Ozkol, I. (2006*). Solution of difference equations by using differential transform method*. Applied mathematics and computation, 174(2), 1216-1228.

Arikoglu, A., & Ozkol, I. (2008). *Solutions of integral and integro-differential equation systems by using differential transform method*. Computers & Mathematics with Applications, 56(9), 2411-2417.

Avudainayagam, A., & Vani, C. (2000). *Wavelet–Galerkin method for integro–differential equations*. Applied Numerical Mathematics, 32(3), 247-254.

Ayaz, F. (2003). *On the two-dimensional differential transform method*. Applied Mathematics and computation, 143(2-3), 361-374.

Birkhoff, G. D. (1908). *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations*. Transactions of the American Mathematical Society, 9(4), 373-395.

Chen, C. K., & Ho, S. H. (1996)*. Application of differential transformation to eigenvalue problems*. Applied mathematics and computation, 79(2-3), 173-188.

Chen, C. L., & Liu, Y. C. (1998). *Solution of two-point boundary-value problems using the differential transformation method*. Journal of Optimization Theory and Applications, 99, 23-35.

Chen, C. O. K., & Ho, S. H. (1999*). Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method*. Applied Mathematics and computation, 106(2-3), 171-179.

El-Sayed, S. M., & Abdel-Aziz, M. R. (2003). *A comparison of Adomian's decomposition method and wavelet-Galerkin method for solving integro-differential equations.* Applied Mathematics and Computation, 136(1), 151-159.

Ertürk, V. S. (2011). *Computing eigenelements of Sturm–Liouville problems of fractional order via fractional differential transform method*. Mathematical and Computational Applications, 16(3), 712-720.

Hassan Abdel-Halim, I.H. (2002*). Different applications for the differential transformation in the differential equations*. Applied Mathematics and Computation, 129, 183-201.

Hosseini, S. M., & Shahmorad, S. (2003). *Tau numerical solution of Fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial bases*. Applied Mathematical Modelling, 27(2), 145-154.

Jang,M.J, ve C.L, Chen, Y.C. Liu (2001). *Two-dimensional differential transform for partial differential equations*, Appl. Math. Comput. 121, 261–270.

Kandemir, M. (2015). *Diferensiyel Denklemler*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Karakoç, F. ve Bereketoğlu, H. (2009). *Solutions of delay differential equations by using differential transform method*. International Journal of Computer Mathematics, *86*(5), 914-923.

Levitan, B.M. ve Sargsjan. (1991). *Sturm-Liouville and Dirac Operators. Kluwer Academic Publisher*, 345, London.

Maleknejad, K., Mirzaee, F., & Abbasbandy, S. (2004). *Solving linear integro-differential equations system by using rationalized Haar functions method*. Applied mathematics and computation, *155*(2), 317-328.

Maleknejad, K., & Mahmoudi, Y. (2003*). Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations*. Applied Mathematics and Computation, *145*(2-3), 641-653.

Mukhtarov, O.Sh. (1994*). Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition*, Tr.J. of Mathematics,183-192.

Mukhtarov, O. S., Olğar, H., & Aydemir, K. (2015). *Resolvent operator and spectrum of new type boundary value problems*. Filomat, *29*(7), 1671-1680.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M. ve Aydemir, K. (2020). *Treatment a New Approximation Method and Its Justification for Sturm–Liouville Problems*. Complexity.

Mukhtarov, O. ve Yücel, M. ve Aydemir, K., (2021*). A new generalization of the differential transform method for solving boundary value problems*. Journal of New Results in Science, 10(2), 49-58.

Odibat, Z., & Momani, S. (2008). *A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order*. Applied Mathematics Letters, *21*(2), 194-199.

Pukhov G.E., (1986). *Differential Transformations and Mathematical modelling of Physical processes*, Naukova Dumka, Kiev.

Rashed, M. T. (2004). *Lagrange interpolation to compute the numerical solutions of differential, integral and integro-differential equations*. Applied Mathematics and computation, *151*(3), 869-878.

Walter, J. (1973). *Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition.* Mathematische Zeitschrift, *133*, 301-312.

Yağmur,G. (2013). *Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Dönüşümler Yardımıyla Çözümü*,Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniverstesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Zhou, J. K. (1986). *Differential transformation and ıts application for electrical circuits*. Huazhong University Press, Wuhan, China.