T.C.

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI HILBERT UZAYLARINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL-OPERATÖR İFADELERİNİN İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Esma ELMACI

Çorum - 2023

AĞIRLIKLI HILBERT UZAYLARINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL-OPERATÖR İFADELERİNİN İNCELENMESİ

Esma ELMACI

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

TEZ DANIŞMANI

Dr. Öğretim Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT

Çorum 2023

Esma ELMACI tarafından hazırlanan “Ağırlıklı Hilbert Uzaylarında Birinci Mertebeden Diferansiyel-Operatör İfadelerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması …/…/…… tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Tuğba YURDAKADİM …………………………………

Dr. Öğr. Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT …………………………………

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ …………………………………

Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/…… tarih ve …………….. sayılı kararı ile Esma ELMACI ’nın Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Prof. Dr. Muhammed Asıf YOLDAŞ

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Esma ELMACI

AĞIRLIKLI HILBERT UZAYLARINDA BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL –OPERATÖR İFADELERİNİN İNCELENMESİ

Esma ELMACI

ORCID:0000-0002-1340-208X

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2023

ÖZET

Bu çalışmada vektör fonksiyonlarının ağırlıklı Hilbert uzaylarının üzerinde lineer (veya quasi-lineer) birinci mertebeden diferansiyel-operatör ifadelerin ürettiği minimal operatörün tüm akretif ve disipatif genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve spektrum yapıları incelenmiştir.

Anahtar Kavramlar: **Ağırlıklı Hilbert uzayı, disipatif ve akretif operatör, genişleme, spektrum.**

Bilim Kodu: 20404

INVESTIGATION OF FIRST ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR EXPRESSIONS IN WEIGHTED HILBERT SPACES

Esma ELMACI

ORCID:0000-0002-1340-208X

HITIT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL

Master of Science Thesis

August 2023

ABSTRACT

In this thesis, in the weighted Hilbert spaces of vector-functions all accretive or dissipative extensions of the minimal operator generated by the first order linear (or quasi linear) differential- operator expression are described in terms of boundary values. Later, structure of the spectrum of these extensions is investigated.

Key Terms: Weighted Hilbert spaces, dissipative and accretive operator, extension, spectrum

Science Code: 20404

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın ortaya çıkması ve yürütülmesi sırasında her türlü yol gösterici olan, çalışmam sırasında beni cesaretlendiren, bilgi ve tecrübelerini zaman kavramı gözetmeksizin her an paylaşan, beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Rukiye ÖZTÜRK MERT'e sonsuz teşekkür ederim.

Bilimsel anlamda bilgilerini esirgemeyen Hitit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma teşekkür ederim. İlköğretimden lisansüstü eğitime kadar uzanan süreçte bana ilgilerini ve desteklerini esirgemeyen aileme, yüksek lisans eğitimime başlama konusunda beni cesaretlendiren kardeşime ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Esma ELMACI

İÇİNDEKİLER

2. BÖLÜM

YAPILAN ÇALIŞMALAR

3. BÖLÜM

ÖRNEKLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$B(X)$	X uzayında lineer sınırlı operatörler uzayı
I	Birim Operatör
$L_{\alpha}^{2}\ (H,(a,b))$	[a,b]'den H Hilbert uzayına tanımlanan vektör fonksiyonların Hilbert uzayı
$R_{\lambda}\ (A),\big(R(\lambda;A)\big)$	A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	A operatörünün spektrumu
$\sigma_{P}(A)$	A operatörünün ayrık spektrumu
$\sigma_{c}\ (A)$	A operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_{r}\ (A)$	A operatörünün kalan spektrumu
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	A operatörünün görüntü kümesi
$Re(A)$	A operatörünün reel kısmı
$Im(A)$	A operatörünün sanal kısmı
$ker\ A$	A operatörünün çekirdeği
$dim\ \ H$	H uzayının boyutu

GİRİŞ

Matematiğin bir alt dalı olan fonksiyonel analiz, reel veya kompleks sayılar üzerindeki fonksiyonların uzaylarının çalışmaları olarak görülmektedir. Fonksiyonel analizin uygulamalarında en çok yararlanılan uzaylar Hilbert uzaylarıdır. İlk olarak bu uzayları 1912 yılında David Hilbert kullanmaya başlamıştır. Hilbert uzaylarında operatörler tanımlanmış ve böylelikle operatör teorisi yapılandırılmıştır. Birçok fiziksel ve teknik iddianın modellenmesi, diferansiyel operatörler ile ifade edilmiştir. Bu nedenle operatör teorisi, modern matematikte, özellikle çok parçacıklı kuantum mekaniği, kuantum alan teorisi, çok noktalı sınır değer problemlerinin modellenmesinde son derece önemli rol oynamaktadır (Albeverio ve ark.,2005), (Zettl,2005). Spektral teorinin uygulanmasında Hilbert uzaylarındaki operatörler önemli bir rol oynar.

F.Riesz, J. von Neumann ve birçok bilim insanı tarafından öncelikle simetrik daha sonra selfadjoint operatörlerin spektrum yapısı inşa edilmiştir. Hilbert uzayında simetrik operatörlerin selfadjoint operatör teorisi Neumann (1929-1930) tarafından geliştirilmiştir. Fischbacher'ın (2017) daha sonraki çalışmaları pozitif kapalı simetrik operatörün tüm negatif olmayan selfadjoint genişlemelerinin karakterizasyonu ile ilgilendi. Selfadjoint olmayan operatörler, kuantum mekaniğinden matematiksel fiziğe kadar birçok bilim dalında karşımıza çıkar. Selfadjoint olmayan operatörleri incelemek genel teorinin bu konuda eksik olduğundan genellikle zordur. Bu operatörlerin disipatif operatörler ve akretif operatörler sınıfları en önemli sınıflarındandır. Akretif ve disipatif operatörler hidrodinamik, lazer ve nükleer saçılma teorileri gibi alanlarda birçok ilginç uygulamalara sahiptir.

(a,b) sonlu aralığında tanımlanan vektör-fonksiyonların Hilbert uzayında regüler diferansiyel ifadesi tarafından doğurulan minimal operatörün spektral analizi ve maksimal akretif genişlemeleri Levchuk (1983) tarafından incelenmiştir. İpek Al ve İsmailov (2019), ağırlıklı Hilbert uzayında vektör fonksiyonlarının birinci mertebeden lineer çok noktalı diferansiyel operatör ifadesinin analog spektral problemlerini incelemiştir. Aynı Hilbert uzaylarında birinci mertebeden diferansiyel operatör ifadesinin bazı spektral problemleri Öztürk Mert, İpek Al ve İsmailov (2020) tarafından incelenmiştir. İpek Al ve Akbaba (2020) sonlu aralıkta tanımlanan Hilbert uzaylarında birinci mertebeden lineer diferansiyel operatör ifadesi tarafından doğurulan minimal operatörün kompakt olarak çözülebilir genişlemelerini ve bunların spektral analizini ifade etmişlerdir. Hilbert uzaylarında sol ve sağ yarı eksende özel tip lineer çok noktalı diferansiyel operatör ifadesinin bazı spektral problemleri Öztürk Mert (2020) tarafından incelenmiştir. İpek Al ve İsmailov (2021) tarafından sonlu aralıkta tanımlanan vektör fonksiyonlarının Hilbert uzaylarında involüsyonlu birinci mertebeden lineer diferansiyel operatör ifadesi tarafından doğurulan minimal operatörün selfadjoint genişlemelerinin genel şekli bulunmuş, ayrıca spektrum kümeleri incelenmiştir.

Nagy ve Foias'ın fonksiyonel model teorisi (1970) disipatif operatörlerin spektral teorisini araştırmak için önemli bir yöntemdir. Vektör-fonksiyonlarının Hilbert uzayında sonlu veya sonsuz

aralıklardan biri durumunda formal simetrik diferansiyel operatör ifadesi tarafından üretilen eşit defekt sayılara sahip minimal operatörün spektral analizi ve maksimal disipatif genişlemeleri Gorbachuk ve Gorbachuk (1991) tarafından incelenmiştir. Rofe-Beketov ve Kholkin özellikle kendi isimleriyle anılan bu metodu (2005)'de genelleştirmişlerdir.
Sağ yarı eksende birinci mertebeden lineer quasi-diferansiyel ifadenin bazı spektral problemleri İpek Al (2018) tarafından incelenmiştir. Öztürk Mert, İsmailov ve İpek Al (2020)'de sağ yarı eksen üzerindeki birinci mertebeden lineer singüler kanonik diferansiyel ifadenin bazı spektral problemleri çalışmışlardır. Vektör-fonksiyonlarının direkt toplam uzaylarında birinci mertebeden singüler çok noktalı diferansiyel ifadenin benzer spektral problemleri İpek Al ve İsmailov (2020) tarafından incelenmiştir.
Bu tez çalışmasında; H ayrılabilir Hilbert uzayı ve $\omega : [0,1] \longrightarrow (0,\infty)$, $\omega \in C^1[0,1]$ ve $\omega : (a,\infty) \longrightarrow (0,\infty),\ a \in \mathbb{R},\ \omega \in C(a,\infty)$ olmak üzere L^2_ω ağırlıklı Hilbert uzayı üzerinde birinci mertebeden diferansiyel operatör ifadesi için aşağıdakilerin yapılması amaçlanmaktadır.
(D-1) $B : [0,1] \longrightarrow H$ düzgün operatör topolojisinde sürekli, lineer selfadjoint olmak üzere $l(u) = u^{'} + Bu$ diferansiyel-operatör ifadesinin $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayı üzerinde doğurduğu minimal operatörün tüm disipatif;
(A-1) $B : [0,1] \longrightarrow H$ düzgün operatör topolojisinde sürekli, lineer selfadjoint olmak üzere $l(u) = iu^{'} + Bu$ diferansiyel-operatör ifadesinin $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayı üzerinde doğurduğu minimal operatörün tüm akretif;
(D-2) $b \in [0,1],\ b \geq 0$ olmak üzere $l(u) = iu^{'} + \frac{i}{2}\frac{\omega^{'}}{\omega}u + bu$ diferansiyel-operatör ifadesinin $L^2_\omega(0,1)$ uzayı üzerinde doğurduğu minimal operatörün tüm disipatif;
(A-2) $B : H \longrightarrow H,\ \ B \geq 0$ ve selfadjoint olmak üzere $l(u) = (\omega u)^{'} + Bu$ singüler quasi-diferansiyel ifadesinin $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayı üzerinde ürettiği minimal operatörün tüm akretif genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilecektir. Ayrıca incelenen genişlemelerin spektral yapısı araştırılacaktır.
Bu çalışmalar sonucunda elde edilen sonuçlar örneklerle desteklenecektir.

1. Bölüm

GENEL TANIMLAR

Bu bölümde verilen genel tanım ve teoremler Aliprantis (1998), Kreyszig (1978), Narici (1972) ve Rynne (2007) çalışmalarında alınmıştır.

1.1. Normlu Vektör Uzayı

X, F cismi üzerinde tanımlı lineer vektör uzayı alınsın. Burada

$$\|.\| : X \longrightarrow [0,\infty), \quad x \longrightarrow \|x\|$$

dönüşümü her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\alpha \in F$ için

- $\|x_1\| = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0$;
- $\|\alpha x_1\| = |\alpha|\|x_1\|$;
- $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$

ifadelerini sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşüme X üzerinde bir *norm* ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de *normlu vektör uzayı* denir.

1.2. İç Çarpım Uzayı

$F = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) ve X vektör uzayı alınsın.
Eğer $(.,.) : X \times X \longrightarrow F$ dönüşümü her $x_1, x_2, x_3 \in X$ ve $\lambda \in F$ için

- $(x_1, x_1) \geq 0$ ve $(x_1, x_1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0$;
- $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$ (kompleks eşlenik)
- $(\lambda x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)$
- $(x_1 + x_2, x_3) = (x_1, x_3) + (x_2, x_3)$

özelliklerini sağlıyorsa (.,.)'ye X uzayı üzerinde *iç çarpım*, $(X, (.,.))$ ikilisine de *iç çarpım uzayı* denir.

1.3. Hilbert Uzayı

Bir (X,(.,.)) bir iç çarpım uzayı olsun. Bu uzay iç çarpımın ürettiği norma göre tam olduğu takdirde bu uzaya *Hilbert Uzayı* denir.

1.4. Vektör Fonksiyonlarının Hilbert Uzayı

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun.
$\int_{a_1}^{a_2} \|g(t)\|_H^2 dt < +\infty$
koşulunu sağlayan $g : [a_1, a_2] \longrightarrow H$ güçlü ölçülebilir vektör fonksiyonlarının lineer vektör uzayı $L_2(H, (a_1, a_2))$ şeklinde ifade edilir. Tanımlanan uzay $(g, h)_{L_2(H,(a_1,a_2))}$: =$\int_{a_1}^{a_2} (g(t), h(t))_H$dt, $g, h \in L_2(H, (a_1, a_2))$ iç çarpımının ürettiği norm ile Hilbert uzayıdır.

1.5. Lebesgue Uzayları

Ω, R^n nin ölçülebilir bir alt kümesi, $|\Omega| > 0$ ve $S(\Omega), \Omega$ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $p \in (1, \infty)$ için,

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \tag{1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon uzayına Lebesgue uzay denir. Ω bölgesinde hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları $L^p(\Omega)$ uzayında eşit kabul edelim. $L^p(\Omega)$ uzayının elemanları (1) ifadesini sağlayan ölçülebilir fonksiyonların denklik sınıflarıdır. Bu farkı göz ardı ederek, eğer u fonksiyonu (1) özelliğini sağlıyorsa $u \in L^p(\Omega)$ ve Ω bölgesinde hemen hemen her yerde $u(x) = 0$ ise $L^p(\Omega)$ uzayında $u = 0$ yazılmaktadır.
Eğer $u_1 \in L^p(\Omega)$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise $zu_1 \in L^p(\Omega)$ olduğu açıktır ve eğer $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$ ise

$$|u_1(x) + u_2(x)|^p \leq (|u_1(x)| + |u_2(x)|^p \leq 2^p(|u_1(x)|^p + |u_2(x)|)^p$$

olduğu için $u_1 + u_2 \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Böylece

$$L^p(\Omega) := \{u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

uzayının vektör uzayı olduğunu görmek kolaydır.
$L^p(\Omega)$ uzayı $p \in [1, \infty)$ için,

$$\|u\|_{p,\Omega} = \|u\|_p = \{\int_\Omega |u(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

normu ile bir Banach uzaydır.

1.6. Ağırlıklı Lebesgue Uzayları

ω fonksiyonu hemen hemen her $x \in R^n$ için $\omega(x) \geq 0$ olacak şekilde R^n de lokal integrallenebilir ise ω fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir.
Ω, R^n de açık bir bölge ve ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_\Omega \omega |u|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine ağırlıklı Lebesgue uzayı adı verilir ve $L^p_\omega(\Omega)$ şeklinde ifade edilir.
$L^p_\omega(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{p,\omega} = (\int_\Omega \omega |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

1.7. Operatör

X ve Y normlu lineer uzayları alınsın. $B : D(B) \subset X \longrightarrow Y$ şeklindeki dönüşüme *operatör* denir. Buradan:
$D(B) := \{x \in X : Bx \ \ tanml\} \subset X$ kümesine B operatörünün *tanım kümesi*,
$R(B) := BD(B) = \{y = Bx : x \in D(B)\} \subset Y$ kümesine ise B operatörünün *değer kümesi*,
$kerB := \{x \in X : Bx = 0\} \subset X$ kümesine ise B operatörünün *çekirdeği* adı verilir.

1.8. Operatörün Normu

X ve Y normlu uzaylar ve $B : X \longrightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü alınsın. Burada

$$\|B\| := inf\{K : K > 0 \, ve \, \forall x \in X \text{ için } \|Bx\|_Y \leq K\|x\|_X\}$$

ifadesine B operatörünün *normu* denir.

1.9. Adjoint Operatörler

H Hilbert uzayı, $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(B)} = H$ olsun. Buradan
$D(B^*) := \{y \in H : her \ x \in D(B)$ için bir $z \in H$ vardır, öyleki $(x, y)_H = (x, z)_H$ } olmak üzere
$B^* : D(B^*) \subset H \longrightarrow H, \ \ B^*$y := z şeklinde tanımlanan operatöre B operatörünün *adjoint operatörü* denir.
H Hilbert uzayı ve $B \in L(H)$ olsun. Eğer $B = B^*$ veya $\forall x, y \in H$ için $(Bx, y) = (x, By)$ ise bu operatöre *selfadjoint operatör* denir.

Örnek: $T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1), \ \ (Tf)(t) := \int_0^t f(s)ds, \ \ f \in L^2(0,1)$ Volterra operatörü-

nün adjointi bulunsun.
$f, g \in L^2(0,1)$ için

$$
\begin{aligned}
(Tf(t), g(t))_{L^2} &= \int_0^1 (Tf)(t)\overline{g(t)}dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^t f(s)ds\right) \overline{g(t)}dt \\
&= -\int_0^1 \left(\int_0^t f(s)ds\right) d\left(\int_t^1 g(s)ds\right) \\
&= -\int_0^t f(s)ds \overline{\int_t^1 g(s)ds}\Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 f(t)\left(\int_t^1 g(s)ds\right)dt \\
&= (f(t), T^*g(t))
\end{aligned}
$$

olup $T^*g(t) = \int_t^1 g(s)ds, \;\; g \in L^2(0,1)$ şeklindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$ şeklinde alınan A operatörü bir selfadjoint operatördür. Yani $A^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

1.10. Disipatif Operatör

H Hilbert uzayı ve $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ bir kapalı yoğun tanımlı operatörü alınsın. Eğer her $\psi \in D(B)$ için

$$Im(B\psi, \psi)_H \geq 0,$$

ise, B operatörüne *disipatif operatör* denir.

1.11. Akretif Operatör

H Hilbert uzayı ve $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ bir kapalı yoğun tanımlı operatörü alınsın. Eğer her $\psi \in D(B)$ için

$$Re(B\psi, \psi)_H \geq 0,$$

ise, B operatörüne *akretif operatör* denir.

1.12. Rezolvent Küme

H Hilbert uzayı ve $B : D(B) \subset H \longrightarrow H$ lineer operatör olsun.

$$\rho(B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (B - \lambda I)^{-1} \in B(X)\}$$

kompleks sayılar kümesine B operatörünün *rezolvent kümesi* adı verilir.

1.13. Spektrum

H bir Hilbert uzayı olsun. $\mathbb{C} \setminus \rho(B)$ kümesine B operatörünün spektrumu adı verilir. B operatörünün spektrum kümesi $\sigma(B)$ şeklinde gösterilir.

1.14. Ayrık Spektrum

$\sigma_p(B) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (B - \lambda I)$ operatörü bire bir değil$\}$
kümesine B operatörünün *ayrık spektrumu* adı verilir. Eğer $\lambda_0 \in \sigma_p(B)$ ise,

$$(B - \lambda_0 I)x_0 = 0$$

denkleminin $x_0 \neq 0$ çözümü vardır.

1.15. Sürekli Spektrum

$$\sigma_c(B) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (B - \lambda I) \text{ bire bir}, \ \overline{R(B - \lambda I)} = H, \text{ fakat } R(B - \lambda I) \neq H\}$$

kümesine B operatörünün *sürekli spektrum* denir.

1.16. Kalan Spektrum

$$\sigma_r(B) := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (B - \lambda I) \text{ bire bir}, \ \overline{R(B - \lambda I)} \neq H\}$$

kümesine B operatörünün *kalan spektrumu* denir.

Örnek: $T : l_2(\mathbb{R}) \longrightarrow l_2(\mathbb{R}), \ T(x_n) := (0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ...), \ x = (x_n) \in l_2(\mathbb{R})$ olsun. Verilen T operatörünün ayrık spektrumu bulunsun.
$x = (x_n) \in l_2$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ alınsın. O halde $Tx = \lambda x$ bağıntısından

$$(0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ..., \ \lambda x_n, ...)$$

yani

$$\lambda x_1 = 0, \ \lambda x_2 = x_1, \ \lambda x_3 = x_2, ..., \lambda x_n = x_{n-1}, ... \quad (*)$$

bulunur. İlk olarak $\lambda \neq 0$ kabul edelsin. Buradan $x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_n = 0, ...$ olur. Yani eğer $\lambda \neq 0$ ise $Tx = \lambda x$ denkleminin $x \neq 0$ için çözümü yoktur.
Şimdi $\lambda = 0$ olsun. $(*)$'daki 2. denklemden $x_1 = 0$ ve ayrıca $x_2 = x_3 = ... = x_n = ... = 0$ olup, $Tx = 0x$ denkleminin yine $x \neq 0$ için çözümü yoktur.

Bu durumda $\sigma_p(T) = \varnothing$ olarak bulunur.

Örnek: $H = L_2(0,1)$ uzayında, $T : L_2(0,1) \longrightarrow L_2(0,1)$,

$$Tu := u^{'} + au, \ \ D(T) = \left\{u \in W_2^1(0,1) : u(0) = 0\right\}$$

operatörünün spektrumunu bulalım.
Bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$u^{'} + au = \lambda u + f, \ \ f \in L_2(0,1)$$

denkleminin genel çözümü

$$u(t) = ce^{(\lambda-a)t} + \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)ds$$

şeklinde olup $u(0) = 0$ sınır değer koşulundan c =0 bulunur. Öyleyse, her $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $f \in L_2(0,1)$ için

$$(T-\lambda)u = f$$

denkleminin

$$u(t) = \int_0^t e^{-(a-\lambda)(t-s)} f(s)ds \in W_2^1(0,1)$$

şeklinde bir tek çözümü vardır, yani her $\lambda \in \mathbb{C}$ için
$(T-\lambda)^{-1} \in B(L_2(0,1))$. Başka bir ifadeyle

$$\sigma(T) = \varnothing, \ \ \rho(T) = \mathbb{C}$$

olarak bulunur.

Örnek: $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \ \ T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ şeklinde verilen operatörün spektrumu incelensin.

Buradan öncelikle $\lambda \in \mathbb{C}$ için $Tx = \lambda x$, $x \in \mathbb{C}^2$ denkleminin sıfırdan farklı çözümü araştırılır. Bu halde

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$$

bağıntısından

$$(1-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0$$

$$(2-\lambda)x_2 = 0$$

bulunur ki bu

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada matris denkleminin sıfırdan farklı çözümü

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

durumunda mümkündür. O halde

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

ve buradan $\lambda = 1$ ve $\lambda = 2$ şeklinde bulunur. Böylece $\sigma_p(T) = \{1, 2\}$ dir.
Ayrıca verilen operatör sonlu boyutlu uzayda tanımlı olduğu için $\sigma_c(T) = \varnothing$ ve $\sigma_r(T) = \varnothing$ dır. Sonuç olarak $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ şeklindedir.

Örnek: $X = (C[0,1], \|.\|_\infty)$ olmak üzere, $T : X \longrightarrow X \;\; Tx = tx(t)$ operatörünü göz önüne

alalım. $Tx = tx(t)$ operatörü için $(T-\lambda I)^{-1}$'i bulalım.

$$tx(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

olup, x(t) çözümü her $t \in [0,1]$ için yukarıdaki eşitliği sağlayan bir fonksiyondur. Eğer $\lambda \in \mathbb{R}\ [0,1]$ $(\lambda < 0$ veya $\lambda > 1)$ ise, yukarıdaki denkleminin her $y \in X$ için $[0,1]$ üzerinde tek

$$x(t) = \frac{1}{1-\lambda} y(t), \;\; t \in [0,1]$$

çözümü vardır. Bu nedenle $\rho(T) = \mathbb{R} \backslash [0,1]$ ve her $\lambda \in \rho(T)$ için

$$(T-\lambda I)^{-1} = \frac{1}{1-\lambda} y(t), \;\; t \in [0,1]$$

olur. Şimdi $\lambda \in [0,1]$ sayısının T operatörünün spektrumuna dahil olduğunu görelim.

$\lambda_0 \in [0,1]$ ve $\in y(t) \in C[0,1]$ fonksiyonu $y(\lambda_0) = a \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için

$$(t - \lambda_0)x(t) = y(t)$$

eşitliği hiçbir $x(t) \in C[0,1]$ fonksiyonu için sağlanamaz, çünkü $t = \lambda_0$ noktasında sol tarafı sıfır, sağ tarafı ise sıfırdan farklıdır. Dolayısı ile $\lambda = \lambda_0$ olduğundan yukarıda verilen denklemin bazı $y(t) \in C[0,1]$ fonksiyonları için çözümü yoktur. Bu ise $\lambda \in \sigma(T)$ olması demektir. Ayrıca $\sigma(T)$'nın hiçbir noktası T operatörünün öz değeri olamaz, çünkü

$$(t - \lambda)x(t) = 0, \;\; \lambda \in [0,1]$$

denkleminin çözümü her $t \neq \lambda_0$ için x(t)'nin süreksizliğine $t = \lambda$ noktasında 0 olur.
Böylece $\sigma_c(T) = [0,1]$ ve $\sigma_p(T) = \varnothing$ olduğu bulunur.

1.17. Defekt Sayıları

B, H Hilbert uzayında lineer operatör ve $n_+ = dim H_{+i}(B^*), n_- = dim H_{-i}(B^*)$ olsun. (n_+, n_-) sayılarına B operatörünün *defekt sayıları* denir.

1.18. Sınır Değerler Uzayı

$B : D(B) \subset H \to H$, H Hilbert uzayında eşit defekt sayısına sahip kapalı simetrik bir operatör olsun. H bir Hilbert uzayı,
$\gamma_1, \gamma_2 : D(B^*) \longrightarrow H$ lineer dönüşümleri için, eğer;

i) her $f, h \in D(B^*)$ için

$$(B^* f, h)_H - (f, B^* h)_H = (\gamma_1 f, \gamma_2 h)_H - (\gamma_2 f, \gamma_1 h)_H$$

ii) her $x_1, x_2 \in H$ için $\gamma_1 f = x_1$ ve $\gamma_2 f = x_2$ koşulunu sağlayan bir $f \in D(B^*)$ elemanı mevcut ise, (H, γ_1, γ_2) üçlüsüne B operatörü için bir *sınır değerler uzayı* denir.

2. Bölüm

YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. (D-1) Durumunda Disipatif Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrumu

Bu çalışmanın ilk bölümünde $\omega : [0,1] \longrightarrow (0,\infty),\ \omega \in C^1[0,1]$ olmak üzere $L^2_\omega = L^2_\omega(H,(0,1))$ ağırlıklı Hilbert uzayında, operatör katsayılı

$$l(u) = u^{'}(t) + B(t)u(t) \tag{2}$$

formundaki diferansiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır.
Burada $t \in [0,1]$ olmak üzere $B(t)$ lineer sınırlı selfadjoint operatördür. Ayrıca $B : [0,1] \longrightarrow H$ düzgün operatör topolojisinde süreklidir.
İlk önce ele alınan $l(\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi verilsin.

Lemma 1 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında $l(\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi

$$l^+(u_2)(t) = -\frac{1}{\omega(t)}(\omega u_2)^{'}(t) + B(t)u_2(t)$$

şeklindedir.

İspat : $u_1, u_2 \in C^1[0,1]$ alınsın. Buradan

$$\begin{aligned}
(l(u_1),u_2)_{L^2_\omega} &= (u_1^{'} + Bu_1, u_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1^{'}, u_2)_{L^2_\omega} + (Bu_1, u_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (u_1^{'}(t), u_2(t))_H \omega(t)dt + (u_1, B^* u_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (u_1^{'}(t), \omega u_2(t))_H dt + (u_1, B^* u_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1(1), u_2(1))_H - (u_1(0), u_2(0))_H \\
&\quad - \int_0^1 (u_1(t), (\omega u_2)^{'}(t))_H dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= -\int_0^1 (u_1(t), (\omega u_2)^{'}(t))_H dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (u_1(t), -(\omega u_2)^{'}(t))_H dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (u_1(t), -\frac{1}{\omega(t)}(\omega u_2)^{'}(t))_H dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1, -\frac{1}{\omega}(\omega u_2)^{'} + Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1, l^+(u_2))_{L^2_\omega}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin formal adjointi

$$l^+(u_2(t)) = -\frac{1}{\omega(t)}(\omega u_2)^{'}(t) + B(t)u_2(t) \tag{3}$$

olarak bulunur.
$L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında (2) ((3)) diferansiyel ifadesi tarafından doğurulan minimal operatör L_0 (L_0^+) ve maksimal operatör de L (L^+) şeklinde tanımlanır. Buradan $L_0 \subset L$ ve $L_0^+ \subset L^+$ ifadeleri doğrudur.
Buradan $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin reel ve karmaşık kısımları bulunabilir. $l(\cdot)$ ve $l^+(\cdot)$ ifadeleri yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
l_r(u) &= \frac{u^{'}(t)+B(t)u(t)-\dfrac{1}{\omega(t)}(\omega u)^{'}(t)+B(t)u(t)}{2} \\
&= \frac{\omega(t)u^{'}(t)-(\omega u)^{'}(t)}{2\omega(t)}+B(t)u(t) \\
&= \frac{\omega(t)u^{'}(t)-\omega^{'}(t)u(t)-\omega(t)u^{'}(t)}{2\omega(t)}+B(t)u(t) \\
&= -\frac{\omega^{'}(t)u(t)}{2\omega(t)}+B(t)u(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_i(u) &= \frac{u^{'}(t)+B(t)u(t)+\dfrac{1}{\omega(t)}(\omega u)^{'}(t)-B(t)u(t)}{2i} \\
&= \frac{\omega(t)u^{'}(t)+\omega^{'}(t)u(t)+\omega(t)u^{'}(t)}{2\omega(t)i} \\
&= \frac{u^{'}(t)}{i}+\frac{\omega^{'}(t)u(t)}{2i\omega(t)} \\
&= -iu^{'}(t)-\frac{i}{2}\frac{\omega^{'}(t)u(t)}{\omega(t)}
\end{aligned}$$

şeklinde $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin reel ve karmaşık kısımları elde edilir.
L^2_ω uzayında, L_0 minimal operatörün tüm maksimal disipatif genişlemelerinin genel formu verilecektir. L_0 minimal operatörün tüm maksimal disipatif genişlemelerini tanımlamak için $l_i(\cdot)$ diferansiyel ifadesi tarafından doğurulan L_{i_0} minimal operatörün tüm maksimal disipatif genişlemelerini tanımlamak yeterlidir.
Ana sonuç için ihtiyaç duyulacak olan L_{i_0} minimal operatörün defekt sayıları bulunsun.

Teorem 1 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_{i_0} minimal operatörünün defekt sayıları

$$(n_+(L_{i_0}),n_-(L_{i_0}))=(dimH,dimH)$$

şeklindedir.

İspat : Hesaplamalarda kolaylık olması için $B=0$ alalım. O zaman $t\in(0,1)$ için

$$-iu_+^{\prime}(t)-\frac{i}{2}\frac{\omega^{\prime}(t)}{\omega(t)}u_+(t)+iu_+(t)=0$$

ve

$$-iu_-'(t) - \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_-(t) - iu_-(t) = 0$$

diferansiyel denklemlerin genel çözümleri araştırılsın. İlk olarak $t \in (0,1)$ için

$$-iu_+'(t) - \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_+(t) + iu_+(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü yapılsın. Verilen diferansiyel denklem

$$u_+^{'}(t) + \frac{\omega^{'}(t)}{2\omega(t)}u_t(t) - u_+(t) = 0$$

yani

$$u_+^{'}(t) + u_+(t)(\frac{\omega^{'}(t)}{2\omega(t)} - 1) = 0$$

şeklinde olup, çözümü $t \in (0,1)$ ve $f \in H$ için

$$u_+(t) = exp\left\{\int_0^t (1 - \frac{\omega^{'}(s)}{2\omega(s)})ds\right\} f$$

elde edilir. Diğer taraftan $t \in (0,1)$ için

$$-iu_-'(t) - \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_-(t) - iu_-(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü bulunabilir. Bu diferansiyel denklem düzenlenirse

$$u_-^{'}(t) + \frac{\omega^{'}(t)}{2\omega(t)}u_-(t) + u_-(t) = 0$$

yani

$$u_-^{'}(t) + u_-(t)(\frac{\omega^{'}(t)}{2\omega(t)} + 1) = 0$$

dır. Son eşitlikten çözüm $t \in (0,1)$ ve $f \in H$ için

$$u_-(t) = exp - \left\{\int_0^t (1 + \frac{\omega^{'}(s)}{2\omega(s)})ds\right\} f$$

olarak bulunur. Buradan $t \in (0,1)$ ve $f \in H$ için

$$u_\pm(t) = exp\left\{\pm \int\limits_0^t \left(1 \mp \frac{\omega^{'}(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\} f$$

elde edilir.

Bulunan çözümlerden,

$$\begin{aligned}
\|u_+(t)\|^2{}_{L^2_\omega} &= \int\limits_0^1 \omega(t)\|u_+(t)\|^2{}_H dt \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)\left\| exp\left\{\int\limits_0^t \left(1-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right)ds\right\} f\right\|^2_H dt \\
&\leq \int\limits_0^1 \omega(t)\left\| exp\left\{\int\limits_0^t \left(1-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right)ds\right\}\right\|^2_H dt\|f\|^2_H \\
&\leq \int\limits_0^1 \omega(t)exp\left\{2\int\limits_0^t \left(1-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right)ds\right\} dt\|f\|^2_H \\
&= \int\limits_0^1 \omega(0)e^{2t}dt\|f\|^2_H = \frac{\omega(0)}{2}(e^2-1)\|f\|^2_H < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$n_+(L_{i_0}) = dimker(L_i + iI) = dimH$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$n_-(L_{i_0}) = dimker(L_i - iI) = dimH$$

olduğu da gösterilebilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur.
Yukarıdaki teoremden, minimal operatör bir maksimal disipatif genişlemeye sahiptir (Gorbachuk,1991). Şimdi tüm maksimal disipatif genişlemelerini tanımlamak için sınır değerler uzayını yapılandırmak gerekir.

Lemma 2 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_{i_0} minimal operatörü ve $u \in D(L_i)$ için γ_1 ve γ_2 fonksiyonları

$$\gamma_1 : D(L_i) \to H,\ \gamma_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)\right)$$
$$\gamma_2 : D(L_i) \to H,\ \gamma_2(u) = -\frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)\right)$$

formunda olmak üzere, (H,γ_1,γ_2) üçlüsü bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat : $u,\ v \in D(L_i)$ alınsın. Buradan

$$
\begin{aligned}
& (L_i u, v)_{L^2_\omega} - (u, L_i v)_{L^2_\omega} \\
= \; & \left(-iu' - \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u + Bu, v\right)_{L^2_\omega} - \left(u, -iv' - \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}v + Bv\right)_{L^2_\omega} \\
= \; & (-iu', v)_{L^2_\omega} + (-\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}, v)_{L^2_\omega} + (Bu, v) \\
& -(u, -iv')_{L^2_\omega} - (u, -\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}, v)_{L^2_\omega} - (u, Bv)_{L^2_\omega} \\
= \; & -i\left[(u', v)_{L^2_\omega} + (u, v')_{L^2_\omega} + \left(\frac{\omega'}{\omega}u, v\right)_{L^2_\omega}\right] \\
= \; & -i\left[\int_0^1 (u'(t), v(t))_H \omega(t)dt + \int_0^1 (u(t), v'(t))_H \omega(t)dt + \int_0^1 (u(t), v(t)\omega'(t))_H dt\right] \\
= \; & -i\left[\int_0^1 (u'(t), v(t)\omega(t))_H dt + \int_0^1 (u(t), (v(t)\omega(t))')_H dt\right] \\
= \; & -i\int_0^1 (u(t), \omega(t)v(t))'_H dt \\
= \; & -i[(\sqrt{\omega(1)}u(1), \sqrt{\omega(1)}v(1))_H - (\sqrt{\omega(0)}u(0), \sqrt{\omega(0)}v(0))_H] \\
= \; & (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $f_1, \; f_2 \in H$ için

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)\right) = f_1, \\
\gamma_2(u) &= -\frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)\right) = f_2
\end{aligned}
$$

denklemlerinden

$$
u(1) = \frac{(f_1 - if_2)}{\sqrt{2\omega(1)}} \quad \text{ve} \quad u(0) = \frac{(f_1 + if_2)}{\sqrt{2\omega(0)}}
$$

eşitliklerini sağlayan $u \in D(L_i)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.
Eğer $u(\cdot)$ fonksiyonu $t \in [0,1]$ için

$$
u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(1)}}(f_1 - if_2)t + \frac{1}{\sqrt{2\omega(0)}}(f_1 + if_2)(1-t)
$$

şeklinde seçilirse, $u \in D(L_i)$ ve $\gamma_1(u) = f_1, \; \gamma_2(u) = f_2$ olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanır.
Şimdi Calkin-Gorbachuk metodu kullanılarak elde edilen aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 2 : Eğer $\widetilde{L_i}$, L_{i_0} minimal operatörün $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayındaki maksimal disipatif genişlemesi ise, bahsedilen genişleme $l_i(\,\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesi ve $T : H \to H$ daralma operatörü olmak üzere,

$$u(1) = \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Tu(0)$$

sınır şartı tarafından doğurulur. Üstelik $T : H \to H$ daralma operatörü $\widetilde{L_i}$ genişlemesi tarafından tek türlü ifade edilir. Yani $\widetilde{L_i} = L_{i_T}$ ve bu iddianın tersinin de doğruluğu geçerlidir.

İspat : L_{i_0} operatörünün her $\widetilde{L_i}$ maksimal disipatif genişlemesi $l_i(\,\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesi ve $T : H \to H$ bir daralma operatörüdür.

$$(T-I)\gamma_1(u) + i(T+I)\gamma_2(u) = 0$$

sınır şartı tarafından üretilir. Yukarıdaki lemmadan, $u \in D(\widetilde{L_i})$ için

$$(T-I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)) + i(T+I)\frac{-1}{i\sqrt{2}}(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)) = 0,$$

yani

$$(T-I)\left(\frac{\sqrt{\omega(1)}u(1)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\omega(0)}u(0)}{\sqrt{2}}\right) + (T+I)\left(-\frac{\sqrt{\omega(1)}u(1)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\omega(0)}u(0)}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

elde edilir.

$$\frac{2\sqrt{\omega(0)}u(0)}{\sqrt{2}}T = \frac{2\sqrt{\omega(1)}u(1)}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \sqrt{\omega(1)}u(1) = T\sqrt{\omega(0)}u(0)$$

eşitliklerinden

$$u(1) = \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Tu(0)$$

sonucuna ulaşılır.
Teorem 2 ve verilen ifadelerden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3 : $\widetilde{L}$, L_0 minimal operatörün maksimal disipatif genişlemesi olsun. Bu genişleme $l(\,\cdot\,)$ ifadesi ve $T : H \to H$ bir daralma operatörü olmak üzere,

$$u(1) = \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Tu(0)$$

sınır şartı tarafından doğurulur. Üstelik $T : H \to H$ daralma operatörü $\widetilde{L}$ genişlemesi tarafından tek türlü ifade edilir. Yani $\widetilde{L} = L_T$ ve bu iddianın tersi de doğrudur.
Böylece $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_0 operatörünün L_T maksimal disipatif genişlemelerinin spektrum yapısı incelenebilir.

Teorem 4 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ ağırlıklı Hilbert uzayında L_0 minimal operatörün L_T disipatif genişlemesinin spektrumu

$$\lambda \in \sigma\left(\sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Texp\left(\int\limits_0^1 B(s)ds\right)\right)$$

olmak üzere

$$\sigma(L_T) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = ln|\lambda| + iarg(\lambda) + 2m\pi i,\ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

şeklindedir.

İspat : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_T operatörünün spektrum problemine bakılsın. Yani

$$L_T(u) = \mu u + f,\ \mu \in \mathbb{C},\ \mu_i = Im\mu \geq 0,\ f \in L^2_\omega.$$

Buradan $t \in [0,1]$ için

$$u'(t) + B(t)u(t) = \mu u(t) + f(t)$$

diferansiyel operatör ifadesinin çözümü incelenirse,

$$u(t;\mu) = exp\left\{-\left(\int\limits_0^t B(s)ds - \mu t\right)\right\} f_\mu + \int\limits_0^t exp\left\{-\int\limits_s^t (B(\tau) - \mu I)d\tau\right\} f(s)ds,\ f_\mu \in H$$

elde edilir. Şimdi verilen problemdeki sınır şartları $u(1)$ ve $u(0)$ çözümde yerine yazılırsa,

$$exp\left\{-\left(\int\limits_0^1 B(s)ds - \mu\right)\right\} f_\mu + \int\limits_0^1 exp\left\{-\int\limits_s^1 (B(\tau) - \mu I)d\tau\right\} f(s)ds = \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Tf_\mu$$

ve buradan

$$\left(exp\left\{-\left(\int\limits_0^1 B(s)ds - \mu\right)\right\} - \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}T\right) f_\mu = -\int\limits_0^1 exp\left\{-\int\limits_s^1 (B(\tau) - \mu I)d\tau\right\} f(s)ds$$

elde edilir. Buradan $\mu \in \sigma(L_T)$ olması için gerekli ve yeter şartın

$$exp\left\{-\left(\int\limits_0^1 B(s)ds - \mu\right)\right\} = \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}T$$

$$\lambda = e^\mu = \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Texp\int\limits_0^1 B(s)ds$$

$$\lambda = e^\mu \in \sigma\left(\sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}Texp\left\{\int\limits_0^1 B(s)ds\right\}\right)$$

olduğu bulunur. Böylece

$$\mu = ln|\lambda| + iarg(\lambda) + 2m\pi i,\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

olup

$$\lambda \in \sigma \left(\sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}} Texp \left\{ \int\limits_0^1 B(s)ds \right\} \right)$$

olduğu elde edilmiş olur.

2.2. (A-1) Durumunda Akretif Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrumu

Bu çalışmanın ikinci bölümünde $\omega : [0,1] \longrightarrow (0,\infty),\ \omega \in C^1[0,1]$ olmak üzere $L^2_\omega(H,(0,1))$ ağırlıklı Hilbert uzayında, operatör katsayılı

$$l(u) = iu^{'}(t) + B(t)u(t) \tag{4}$$

diferansiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır.
Burada $t \in [0,1]$ olmak üzere $B(t)$ lineer sınırlı selfadjoint bir operatördür. Ayrıca $B : [0,1] \longrightarrow H$ düzgün operatör topolojisinde süreklidir.
İlk önce ele alınan $l(\cdot)$ diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi verilsin.

Lemma 3 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında $l(\cdot)$ diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi

$$l^+(u_2) = \frac{i}{\omega(t)}(\omega u_2)^{'}(t) + B(t)u_2(t)$$

şeklindedir.

İspat : $u_1, u_2 \in C^1[0,1]$ alınsın. Buradan

$$\begin{aligned}
(l(u_1), u_2)_{L^2_\omega} &= (iu_1^{'} + Bu_1, u_2)_{L^2_\omega} \\
&= (iu_1^{'}, u_2)_{L^2_\omega} + (Bu_1, u_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (iu_1^{'}(t), u_2(t))_H \omega(t)dt + (u_1, B^* u_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (u_1^{'}(t), (-i\omega u_2)(t))_H dt + (u_1, B^* u_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1(1), -i\omega(1)u_2(1))_H - (u_1(0), -i\omega(0)u_2(0))_H \\
&\quad - \int_0^1 (u_1(t), -i(\omega u_2)^{'}(t))_H dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= \int_0^1 (u_1(t), i(\omega u_2)^{'}(t))_H dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (u_1(t), \frac{i}{\omega(t)}(\omega u_2)^{'}(t))_H \omega(t)dt + (u_1, Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1, \frac{i}{\omega}(\omega u_2)^{'} + Bu_2)_{L^2_\omega} \\
&= (u_1, l^+(u_2))_{L^2_\omega}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin formal adjointi

$$
l^+(u_2(t)) = \frac{i}{\omega(t)}(\omega u_2)^{'}(t) + B(t)u_2(t) \tag{5}
$$

olarak bulunur.

$L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında (4) ((5)) diferansiyel ifadeleri tarafından doğurulan minimal operatör L_0 (L_0^+) ve maksimal operatör de L (L^+) şeklinde tanımlanır. $L_0 \subset L$ ve $L_0^+ \subset L^+$ olduğu açıktır. Buradan $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin reel ve karmaşık kısımları bulunabilir. $l(\cdot)$ ve $l^+(\cdot)$ ifadeleri yerine yazılarak,

$$
\begin{aligned}
l_r(u) &= \frac{l(u)+l^+(u)}{2} \\
&= \frac{\omega(t)iu^{'}(t) + \omega(t)B(t)u(t) + i(u\omega)^{'}(t) + B(t)v(t)\omega(t)}{2} \\
&= \frac{i\omega(t)u^{'}(t) + i(\omega u)^{'}(t)}{2\omega(t)} + B(t)u(t)\omega(t) \\
&= \frac{i\omega(t)u^{'}(t) + iu^{'}(t)\omega(t) + i\omega^{'}(t)u(t)}{2} + B(t)u(t)\omega(t) \\
&= \frac{2iu^{'}(t)\omega(t) + iu(t)\omega^{'}(t)}{2} + B(t)u(t)\omega(t) \\
&= iu^{'}(t) + \frac{i}{2}\frac{\omega^{'}(t)}{\omega(t)}u(t) + B(t)u(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_i(u) &= \frac{l(u)-l^+(u)}{2i} \\
&= \frac{iu^{'}(t) + B(t)u(t) - \frac{i}{\omega(t)}(\omega u)^{'}(t) - B(t)u(t)}{2i} \\
&= \frac{i\omega(t)u^{'}(t) - i\omega^{'}(t)u(t) - i\omega(t)u^{'}(t)}{2\omega(t)i} \\
&= -\frac{\omega^{'}(t)u(t)}{2\omega(t)}
\end{aligned}
$$

şeklinde $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin reel ve karmaşık kısımları elde edilir.

L^2_ω uzayında, L_0 operatörün tüm maksimal akretif genişlemelerinin genel formu verilecektir. L_0 minimal operatörün tüm maksimal akretif genişlemelerini tanımlamak için $l_r(\,\cdot\,)$ diferansiyel ifadesi tarafından doğurulan L_{r_0} minimal operatörün tüm maksimal akretif genişlemelerini tanımlamak yeterlidir.

İlk önce, bu bölümün temel sonucu için ihtiyaç duyulacak olan L_{r_0} minimal operatörün defekt sayıları bulunsun.

Teorem 5 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_{r_0} minimal operatörünün defekt sayıları

$$(n_+(L_{r_0}), n_-(L_{r_0})) = (dimH, dimH)$$

şeklindedir.

İspat : Hesaplamalarda kolaylık olması için $B = 0$ alalım. O zaman $t \in (0,1)$ için

$$iu'_\pm(t) + \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_\pm(t) \pm iu_\pm(t) = 0$$

diferansiyel denklemlerin genel çözümleri araştırılsın. İlk olarak $t \in (0,1)$ için

$$iu'_+(t) + \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_+(t) + iu_+(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü yapılsın. Verilen diferansiyel denklem

$$u'_+(t) + \frac{\omega'(t)}{2\omega(t)}u_t(t) + u_+(t) = 0$$

yani

$$u'_+(t) + u_+(t)(\frac{\omega'(t)}{2\omega(t)} + 1) = 0$$

şeklinde olup, çözümü $t \in (0,1)$ ve $f \in H$ için

$$u_+(t) = exp\left\{-\int_0^t (1 + \frac{\omega'(s)}{2\omega(s)})ds\right\} f$$

elde edilir. Diğer taraftan $t \in (0,1)$ için

$$iu'_-(t) + \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_-(t) - iu_-(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü için, gerekli düzenleme yapılırsa

$$u'_-(t) + \frac{\omega'(t)}{2\omega(t)}u_-(t) - u_-(t) = 0$$

yani

$$u'_-(t) + u_-(t)(\frac{\omega'(t)}{2\omega(t)} - 1) = 0.$$

Son eşitlikten istenilen çözüm $t \in (0,1)$ ve $f \in H$ için

$$u_-(t) = exp\left\{\int_0^t (1 - \frac{\omega'(s)}{2\omega(s)})ds\right\} f$$

olarak bulunur. Böylece $t \in (0,1)$ ve $f \in H$ için

$$u_{\pm}(t) = exp\left\{ \mp \int\limits_0^t \left(1 \pm \frac{\omega^{'}(s)}{2\omega(s)} \right) ds \right\} f$$

elde edilir.

Bulunan çözümlerden

$$\begin{aligned}
\|u_+(t)\|^2{}_{L^2_\omega} &= \int\limits_0^1 \omega(t)\|u_+(t)\|^2{}_H dt \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)\left\| exp\left\{ -\int\limits_0^t \left(1+\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds \right\} f \right\|_H^2 dt \\
&\leq \int\limits_0^1 \omega(t)\left\| exp\left\{ -\int\limits_0^t \left(1+\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds \right\} \right\|_H^2 dt\|f\|_H^2 \\
&\leq \int\limits_0^1 \omega(t) exp\left\{ -2\int\limits_0^t \left(1+\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds \right\} dt\|f\|_H^2 \\
&= \int\limits_0^1 \omega(0)e^{-2t}dt\|f\|_H^2 = \frac{\omega(0)}{2}(1-e^{-2})\|f\|_H^2 < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle

$$n_+(L_{r_0}) = dimker(L_r + iI) = dimH$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$n_-(L_{r_0}) = dimker(L_r - iI) = dimH$$

olduğu da gösterilebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Son teorem gösterir ki, minimal operatör bir maksimal akretif genişlemeye sahiptir (Gorbachuk,1991). Şimdi tüm maksimal akretif genişlemelerini tanımlamak için sınır değerler uzayını yapılandırmak gerekir.

Lemma 4 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_{r_0} minimal operatörü ve γ_1 ve γ_2 fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: D(L_r) \to H,\ \gamma_1(u) = -\frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)\right), \\
\gamma_2 &: D(L_r) \to H,\ \gamma_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)\right),\ u \in D(L_r)
\end{aligned}$$

formunda olmak üzere, (H, γ_1, γ_2) üçlüsü bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat : $u,\ v \in D(L_r)$ alınsın. Buradan

$$
\begin{aligned}
& (L_r u, v)_{L^2_\omega} - (u, L_r v)_{L^2_\omega} \\
= & \left(iu' + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u + Bu, v\right)_{L^2_\omega} - \left(u, iv' + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}v + Bv\right)_{L^2_\omega} \\
= & (iu', v)_{L^2_\omega} + (\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}, v)_{L^2_\omega} + (Bu, v) \\
& -(u, iv')_{L^2_\omega} - (u, \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}, v)_{L^2_\omega} - (u, Bv)_{L^2_\omega} \\
= & \ i\left[(u', v)_{L^2_\omega} + (u, v')_{L^2_\omega} + \left(\frac{\omega'}{\omega}u, v\right)_{L^2_\omega}\right] \\
= & \ i\left[\int_0^1 (u'(t), v(t))_H \omega(t)dt + \int_0^1 (u(t), v'(t))_H \omega(t)dt + \int_0^1 (u(t), v(t)\omega'(t))_H dt\right] \\
= & \ i\left[\int_0^1 (u'(t), v(t)\omega(t))_H dt + \int_0^1 (u(t), (v(t)\omega(t))')_H dt\right] \\
= & \ i\int_0^1 (\sqrt{\omega(t)}u(t), \sqrt{\omega(t)}v(t))'_H dt \\
= & \ (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $f_1,\ f_2 \in H$ için

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(u) &= -\frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)\right) = f_1, \\
\gamma_2(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)\right) = f_2
\end{aligned}
$$

denklemlerinden

$$
u(1) = \frac{(f_2 - if_1)}{\sqrt{2\omega(1)}} \quad \text{ve} \quad u(0) = \frac{(f_2 + if_1)}{\sqrt{2\omega(0)}}
$$

eşitliklerini sağlayan $u \in D(L_r)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.
Eğer $u(\,\cdot\,)$ fonksiyonu $t \in [0, 1]$ için

$$
u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(1)}}(f_2 - if_1)t + \frac{1}{\sqrt{2\omega(0)}}(f_2 + if_1)(1 - t)
$$

şeklinde seçilirse, $u \in D(L_r)$ ve $\gamma_1(u) = f_1,\ \gamma_2(u) = f_2$ olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanır.
Calkin-Gorbachuk metodu kullanılarak elde edilen aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 6 : Eğer $\widetilde{L_r}$, L_{r_0} minimal operatörün $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayındaki maksimal akretif genişlemesi ise, bu genişleme $l_r(\cdot)$ ifadesi ve $K : H \to H$ daralma operatörü olmak üzere,

$$u(0) = \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} K u(1)$$

sınır şartı tarafından üretilir. Üstelik $K : H \to H$ daralma operatörü $\widetilde{L_r}$ genişlemesi tarafından tek türlü olarak ifade edilir. Yani $\widetilde{L_r} = L_{r_K}$. Ayrıca bu önermenin tersi de doğrudur.

İspat : L_{r_0} operatörünün her $\widetilde{L_r}$ maksimal akretif genişlemesi $l_r(\cdot)$ diferansiyel operatör ifadesi ve $T : H \to H$ bir daralma operatörü olmak üzere

$$(T-I)\gamma_1(u) + i(T+I)\gamma_2(u) = 0$$

sınır şartı tarafından doğurulur. Buradan, $u \in D(\widetilde{L_r})$ için

$$(T-I)\left(-\frac{1}{i\sqrt{2}}\right)(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)) + i(T+I)\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)) = 0,$$

yani

$$(T-I)\left(-\frac{\sqrt{\omega(1)}u(1)}{i\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\omega(0)}u(0)}{i\sqrt{2}}\right) + (T+I)\left(-\frac{\sqrt{\omega(1)}u(1)}{i\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{\omega(0)}u(0)}{i\sqrt{2}}\right) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$-\frac{2\sqrt{\omega(1)}u(1)}{i\sqrt{2}}T = \frac{2\sqrt{\omega(0)}u(0)}{i\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad \sqrt{\omega(0)}u(0) = -T\sqrt{\omega(1)}u(1),$$

olup $K = -T$ olmak üzere

$$u(0) = \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} K u(1)$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 6 ve bilinen bir sonuçtan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 7 : $\widetilde{L}$, L_0 minimal operatörün maksimal akretif genişlemesi ise, bu genişleme $l(\cdot)$ ifadesi ve $K : H \to H$ daralma operatörü için

$$u(0) = \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} K u(1)$$

sınır şartı tarafından doğurulur. Üstelik $K : H \to H$ daralma operatörü $\widetilde{L}$ tarafından tek türlü ifade edilir. Yani $\widetilde{L} = L_K$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

Böylece $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_0 operatörünün L_K maksimal akretif genişlemelerinin spektrum yapısı incelenebilir. Şimdi bu spektrum yapıya ait sonuç verilsin.

Teorem 8 : $L^2_\omega(H,(0,1))$ ağırlıklı Hilbert uzayında L_0 minimal operatörün L_K akretif genişlemesinin spektrumu

$$\lambda \in \sigma\left(\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} Kexp\left(i\int_0^1 B(s)ds\right)\right)$$

olmak üzere

$$\sigma(L_K) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = arg(\lambda) + 2m\pi + iln|\lambda|^{-1},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

şeklindedir.

İspat : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_K operatörünün spektrum problemi $f \in L^2_\omega$ olmak üzere

$$L_K(u) = \mu u + f,\ \mu \in \mathbb{C},\ \mu_r = Re\mu \geq 0$$

ele alınsın. Buradan $t \in [0,1]$ için

$$iu'(t) + B(t)u(t) = \mu u(t) + f(t)$$

diferansiyel operatör ifadesi elde edilir. Buradan çözüm $f_\mu \in H$ için

$$u(t;\mu) = exp\left\{i\left(\int_0^t B(s)ds - \mu t\right)\right\} f_\mu - i\int_0^t exp\left\{i\int_s^t (B(\tau) - \mu I)d\tau\right\} f(s)ds$$

olarak bulunur. Şimdi verilen problemdeki $u(1)$ ve $u(0)$ sınır şartları çözümde yerine yazılırsa,

$$f_\mu = exp\left\{\left(\int_0^1 B(s)ds - \mu\right)\right\} f_\mu - i\int_0^1 exp\left\{i\int_s^1 (B(\tau) - \mu I)d\tau\right\} f(s)ds\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}K$$

ve buradan

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}Kexp\left\{\left(i\int_0^1 B(s)ds - \mu\right)\right\} - I\right) f_\mu \\ = \quad & i\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}K\int_0^1 exp\left\{i\int_s^1 (B(\tau) - \mu I)d\tau\right\} f(s)ds\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\mu \in \sigma(L_K)$ olması için gerekli ve yeter şartın

$$\left(\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}Kexp\left\{\left(i\int_0^1 B(s)ds - \mu\right)\right\} - I\right) f_\mu = 0$$

yani,

$$\lambda = e^{i\mu} \in \sigma\left(\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}Kexp\left\{i\int_0^1 B(s)ds\right\}\right)$$

olduğu bulunur. Böylece

$$\mu = arg(\lambda) + 2m\pi + iln|\lambda|^{-1},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

olup

$$\lambda \in \sigma \left(\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}} Kexp \left\{ i \int_0^1 B(s)ds \right\} \right)$$

olduğu elde edilmiş olur. Bu ise ispatı tamamlar.

2.3. (D-2) Durumunda Disipatif Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrumu

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde $\omega\ :\ [0,1] \longrightarrow (0,\infty),\ \ \omega \in C^1[0,1]$ olmak üzere $L^2_\omega(0,1)$ uzayında,

$$l(u) = iu^{'} + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u + bu \tag{6}$$

formundaki diferansiyel-operatör ifadesi ele alınacaktır.
Burada $b \in [0,1]$, $b \geq 0$ olarak alınacaktır.
İlk önce ele alınan $l(\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi verilsin.

Lemma 5 : $L^2_\omega(0,1)$ uzayında $l(\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi

$$l^{+}(u_2) = iu_2^{'} + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u_2 + bu_2$$

şeklindedir.

İspat : $u_1, u_2 \in C^1[0,1]$ alınsın. Buradan

$$\begin{aligned}
(l(u_1), u_2)_{L^2_\omega(0,1)} &= (iu_1^{'} + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u_1 + bu_1, u_2)_{L^2_\omega(0,1)} \\
&= (iu_1^{'}, u_2)_{L^2_\omega(0,1)} + (\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u_1, u_2)_{L^2_\omega(0,1)} + (bu_1, u_2)_{L^2_\omega(0,1)} \\
&= i\int_0^1 u_1^{'}(t)\overline{u_2(t)}\omega(t)dt + \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_1(t)\overline{u_2(t)}\omega(t)dt + (bu_1, u_2)_{L^2_\omega(0,1)} \\
&= i\Big[(u_1(1), \overline{u_2(1)}\omega(1) - (u_1(0, \overline{u_2(0)}\omega(0))))\Big] - i\int_0^1 u_1(t)(\overline{u_2(t)}\omega(t))^{'}dt \\
&\quad + \frac{i}{2}\int_0^1 \omega^{'}(t)u_1(t)\overline{u_2(t)}dt + (bu_1, u_2)_{L^2_\omega(0,1)} \\
&= -i\int_0^1 u_1(t)(\overline{u_2^{'}(t)}\omega(t) + \overline{u_2(t)}\omega^{'}(t))dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{i}{2}\int_0^1 u_1(t)\overline{u_2(t)}\omega^{'}(t)dt+(bu_1,u_2)_{L^2_\omega(0,1)}\\
=\ & -i\int_0^1 u_1(t)\overline{u_2^{'}(t)}\omega(t)dt-\frac{i}{2}\int_0^1 u_1(t)\overline{u_2(t)}\omega^{'}(t)dt+(bu_1,u_2)_{L^2_\omega(0,1)}\\
=\ & \int_0^1 u_1(t)(\overline{iu_2^{'}(t)})\omega(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^1 u_1(t)(\overline{iu_2(t)})\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\omega(t)dt+(bu_1,u_2)_{L^2_\omega(0,1)}\\
=\ & \int_0^1 (u_1(t),iu_2^{'}(t)+\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}(t)+bu_2(t))\omega(t)dt\\
=\ & (u_1,iu_2^{'}+\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u_2+bu_2)_{L^2_\omega(0,1)}\\
=\ & (u_1,l^+(u_2))_{L^2_\omega(0,1)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $L^2_\omega(0,1)$ uzayında $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesinin formal adjointi

$$l^+(u_2)=iu_2^{'}+\frac{i}{2}\frac{\omega^{'}}{\omega}u_2+bu_2$$

olarak bulunur. Böylece $L^2_\omega(0,1)$ uzayında $l(\cdot)$ diferansiyel ifadesi formal simetriktir. (6) diferansiyel ifadesi tarafından doğurulan minimal operatör L_0 ve maksimal operatör L şeklinde tanımlanır. Buradan $L_0\subset L$, $L=(L_0^*)$ olduğu açıktır.
İlk olarak L_0 minimal operatörün defekt sayıları bulunsun.

Teorem 9 : $L^2_\omega(0,1)$ uzayında L_0 minimal operatörünün defekt sayıları

$$(n_+(L_0),n_-(L_0))=(1,1)$$

şeklindedir.

İspat : Hesaplamalarda kolaylık olması için $b=0$ alalım. O zaman $t\in(0,1)$ için

$$iu_\pm^{'}(t)+\frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u(t)_\pm\pm iu_\pm(t)=0$$

diferansiyel denklemlerin genel çözümleri araştırılsın. İlk olarak $t\in(0,1)$ için

$$iu_+^{'}(t)+\frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u(t)_++iu_+(t)=0$$

diferansiyel denkleminin çözümü yapılsın. Verilen diferansiyel denklem

$$u_+^{'}(t)+\frac{\omega'(t)}{2\omega(t)}u(t)_++u_+(t)=0$$

yani

$$u_+^{'}(t)+(\frac{\omega'(t)}{2\omega(t)}+1)u_+(t)=0$$

şeklinde olup, çözümü $t \in (0,1)$ için

$$u_+(t) = exp\left\{\int\limits_0^t (-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)} - 1)ds\right\} c, \ \ c \in \mathbb{C}$$

elde edilir. Diğer taraftan $t \in (0,1)$ için

$$iu'_-(t) + \frac{i}{2}\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}u_-(t) - iu_-(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü bulunabilir. Bu diferansiyel denklem düzenlenirse

$$u_-^{'}(t) + \frac{\omega^{'}(t)}{2\omega(t)}u_-(t) - u_-(t) = 0$$

yani

$$u_-^{'}(t) + u_-(t)(\frac{\omega^{'}(t)}{2\omega(t)} - 1) = 0$$

dır. Son eşitlikten çözüm

$$u_-(t) = exp\left\{\int_0^t (1 - \frac{\omega^{'}(s)}{2\omega(s)})ds\right\} c, \ \ c \in \mathbb{C}, \ 0 < t < 1$$

olarak bulunur. Buradan

$$u_\pm(t) = exp\left\{\mp\int\limits_0^t \left(1 \pm \frac{\omega^{'}(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\} c, \ \ c \in \mathbb{C}, \ 0 < t < 1$$

elde edilir.

Bulunan çözümlerden

$$\begin{aligned}
\|u_+(t)\|^2{}_{L^2_\omega(H,(0,1))} &= \int\limits_0^1 \omega(t)\|u_+(t)\|^2{}_H dt \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)\left\|exp\left\{-\int\limits_0^t \left(1 + \frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\} c\right\|^2_H dt \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)\left\|exp\left\{-\int\limits_0^t \left(1 + \frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\}\right\|^2_H dt \mid c \mid^2 \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)exp\left\{-2\int\limits_0^t \left(1 + \frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\} dt \mid c \mid^2 \\
&= \int\limits_0^1 \omega(0)e^{-2t}dt \mid c \mid^2 = \frac{\omega(0)}{2}(1 - e^{-2}) \mid c \mid^2 < \infty
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|u_-(t)\|^2{}_{L^2_\omega(H,(0,1))} &= \int\limits_0^1 \omega(t)\|u_-(t)\|^2{}_H dt \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)\left\| exp\left\{\int\limits_0^t \left(1-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\} c\right\|_H^2 dt \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t)\left\| exp\left\{\int\limits_0^t \left(1-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\}\right\|_H^2 dt \mid c\mid^2 \\
&= \int\limits_0^1 \omega(t) exp\left\{2\int\limits_0^t \left(1-\frac{\omega'(s)}{2\omega(s)}\right) ds\right\} dt \mid c\mid^2 \\
&= \int\limits_0^1 \omega(0)e^{2t} dt \mid c\mid^2 = \frac{\omega(0)}{2}(e^2-1)\mid c\mid^2 < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir.
Buradan $u_\pm(t) \in L^2_\omega(0,1)$ elde edilir. Dolayısıyla $n_+(L_0) = dimker(L+iI) = 1$ ve $n_-(L_0) = dimker(L-iI) = 1$ olduğu görülür.
Böylece minimal operatör bir maksimal disipatif genişlemeye sahiptir (Gorbachuk,1991). Şimdi tüm maksimal disipatif genişlemeleri tanımlamak için sınır değerler uzayını yapılandırmak gerekir.

Lemma 6 : $L^2_\omega(0,1)$ uzayında L_0 minimal operatörü ve $u \in D(L)$ için γ_1 ve γ_2 fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : D(L) \to \mathbb{C},\ \gamma_1(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)\right), \\
\gamma_2 : D(L) \to \mathbb{C},\ \gamma_2(u) &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)\right)
\end{aligned}$$

formunda olmak üzere, $(\mathbb{C}, \gamma_1, \gamma_2)$ üçlüsü bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat : $u,\ v \in D(L)$ için,

$$\begin{aligned}
& (L_i u, v)_{L^2_\omega(H,(0,1))} - (u, L_i v)_{L^2_\omega(H,(0,1))} \\
= & \left(iu' + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u + bu, v\right)_{L^2_\omega(0,1)} - \left(u, iv' + \frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}v + bv\right)_{L^2_\omega(0,1)} \\
= & \ i\left[\int\limits_0^1 u'(t)\overline{v(t)}\omega(t)dt + \int\limits_0^1 u(t)(\overline{v(t)}\omega(t))'dt\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i\int_0^1 (u(t),\omega(t)v(t))'\,dt \\
&= i\int_0^1 (\sqrt{\omega(t)}u(t),\sqrt{\omega(t)}v(t))'\,dt \\
&= i\left[(\sqrt{\omega(1)}u(1),\sqrt{\omega(1)}v(1)) - (\sqrt{\omega(0)}u(0),\sqrt{\omega(0)}v(0))\right] \\
&= (\gamma_1(u),\gamma_2(v)) - (\gamma_2(u),\gamma_1(v))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ için

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)\right) = c_1, \\
\gamma_2(u) &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)\right) = c_2,
\end{aligned}
$$

yani buradan

$$
u(1) = \frac{(c_1+ic_2)}{\sqrt{2\omega(1)}} \quad \text{ve} \quad u(0) = \frac{(ic_2-c_1)}{\sqrt{2\omega(0)}}
$$

eşitliğini sağlayan $u \in D(L)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.
Eğer $u(\,\cdot\,)$ fonksiyonu, $t \in [0,1]$ için

$$
u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega(1)}}(c_1+ic_2)t + \frac{1}{\sqrt{2\omega(0)}}(ic_2-c_1)(1-t)
$$

şeklinde seçilirse, $u \in D(L)$ ve $\gamma_1(u) = c_1,\ \gamma_2(u) = c_2$ olduğu bulunur.
Calkin-Gorbachuk metodu yardımıyla aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 10 : Eğer $\widetilde{L}$, L_0 minimal operatörün $L^2_\omega(0,1)$ uzayındaki maksimal disipatif genişlemesi ise, bu genişleme $l(\,\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesi ve $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ve $\mid T \mid \leq 1$ bir daralma operatörü olmak üzere,

$$
u(0) = \sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}\,Tu(1)
$$

sınır şartı tarafından doğrulur. Üstelik $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ daralma operatörü $\widetilde{L}$ tarafından tek türlü ifade edilir. Yani $\widetilde{L} = L_T$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

İspat : L_0 operatörünün her $\widetilde{L}$ maksimal disipatif genişlemesi $l(\,\cdot\,)$ diferansiyel operatör ifadesi ve $K:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ve $\mid K \mid \leq 1$ olmak üzere

$$
(K-I)\gamma_1(u) + i(K+I)\gamma_2(u) = 0
$$

sınır şartı tarafından üretilir. Buradan, $u \in D(\widetilde{L})$ için

$$
(K-I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{\omega(1)}u(1) - \sqrt{\omega(0)}u(0)) + i(K+I)\frac{1}{i\sqrt{2}}(\sqrt{\omega(1)}u(1) + \sqrt{\omega(0)}u(0)) = 0,
$$

yani

$$(K-I)\left(\frac{\sqrt{\omega(1)}u(1)}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\omega(0)}u(0)}{\sqrt{2}}\right)+(K+I)\left(\frac{\sqrt{\omega(1)}u(1)}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\omega(0)}u(0)}{\sqrt{2}}\right)=0$$

olup buradan gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\sqrt{\omega(0)}u(0)=-K\sqrt{\omega(1)}u(1)$$

elde edilir. Eğer $T=-K$ seçilirse

$$u(0)=\sqrt{\frac{\omega(1)}{\omega(0)}}Tu(1)$$

sonucuna ulaşılır. Artık ele alınan disipatif genişlemenin spektrum yapısı incelenebilir.

Teorem 11 : $L^2_\omega(0,1)$ uzayında L_0 minimal operatörün L_T disipatif genişlemesinin spektrumu

$$\sigma(L_T)=\left\{\mu\in\mathbb{C}:\mu=\int_0^1 a(s)ds+argT+2n\pi+iln|\frac{1}{T}|,n\in\mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

İspat : $L^2_\omega(H,(0,1))$ uzayında L_T operatörünün spektrum problemi $f\in L^2_\omega(0,1)$ olmak üzere

$$L_T(u)=\mu u+f,\ \mu\in\mathbb{C},\ \mu_i=Im\mu\geq 0.$$

Buradan $t\in[0,1]$ için

$$iu'(t)+\frac{i}{2}\frac{\omega'}{\omega}u(t)+b(t)u(t)=\mu u(t)+f(t)$$

diferansiyel operatör ifadesinin çözümü

$$u(t;\mu)=\sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(t)}}e^{-i\mu t}e^{i\int_0^t b(s)ds}c_\lambda-i\int_0^t\sqrt{\frac{\omega(s)}{\omega(t)}}e^{-i\mu(t-s)}e^{i\int_s^t b(\tau)d\tau}f(s)ds,\ \ c_\mu\in\mathbb{C}$$

olarak bulunur. Şimdi verilen problemdeki $u(1)$ ve $u(0)$ sınır şartları çözümde yerine yazılırsa,

$$\sqrt{\omega(0)}c_\mu=T\sqrt{\omega(1)}\left(\sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(1)}}e^{-i\mu}e^{i\int_0^1 b(s)ds}c_\mu-i\int_0^1\sqrt{\frac{\omega(s)}{\omega(1)}}e^{-i\mu(1-s)}e^{i\int_s^1 b(\tau)d\tau}f(s)ds\right)$$

gerekli sadeleştirmeler sonucunda

$$\left(e^{i\mu}-Te^{i\int_0^1 b(s)ds}\right)c_\mu=-\frac{i}{\sqrt{\omega(0)}}T\int_0^1\sqrt{\omega(s)}e^{-i\mu(1-s)}e^{i\int_s^1 b(\tau)d\tau}f(s)ds$$

elde edilir. Buradan $\mu \in \sigma(L_T)$ olması için gerekli ve yeter şartın

$$e^{i\mu} - Texp\left(i\int_0^1 b(s)ds\right) = 0$$

yani,

$$i\mu = ln|T| + iarg\left(Te^{i\int_0^1 b(s)ds}\right) + 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}$$

olup buradan

$$\mu = arg\left(Te^{i\int_0^1 b(s)ds}\right) + 2n\pi - iln|T| = argT + \int_0^1 b(s)ds + 2n\pi - iln|T|$$

olduğu bulunur. Böylece

$$\mu = \int_0^1 b(s)ds + argT + 2n\pi + iln|\frac{1}{T}| \quad , n \in \mathbb{Z}$$

olduğu elde edilmiş olur.

2.4.(A-2) Durumunda Akretif Genişlemelerinin Gösterimi ve Spektrumu

Bu çalışmanın dördüncü bölümünde $a \in \mathbb{R}$, $\omega : (a,\infty) \longrightarrow (0,\infty), \;\; \omega \in C(a,\infty)$ ve $a^{-1} \in L^1(a,\infty)$ olmak üzere $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında, operatör katsayılı

$$l(u) = (\omega u)^{'}(t) + B(t)u(t) \tag{7}$$

formundaki birinci mertebeden quasi-diferansiyel operatör ifadesi ele alınacaktır.
Burada $B \geq 0$ ve $B : H \longrightarrow H$ selfadjoint bir operatördür.
İlk önce ele alınan $l(\cdot\,)$ quasi-diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi verilsin.

Lemma 7 : $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında $l(\cdot\,)$ quasi-diferansiyel operatör ifadesinin formal adjoint ifadesi

$$l^+(u_2) = -(\omega u_2)^{'}(t) + B(t)u_2(t)$$

şeklindedir.

İspat : $u_1, u_2 \in C(a,\infty)$ alınsın. Buradan

$$\begin{aligned}(l(u_1),u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} &= ((\omega u_1)^{'} + Bu_1, u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\ &= ((\omega u_1)^{'}, u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} + (Bu_1, u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^\infty ((\omega u_1)'(t), u_2(t))_H \omega(t)dt + (u_1, B^* u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= \int_a^\infty ((\omega u_1)'(t), \omega u_2(t))_H dt + (u_1, B^* u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= -\int_a^\infty ((\omega u_1)(t), (\omega u_2)'(t))_H dt + (u_1, B u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= -\int_a^\infty (\omega(t) u_1(t) \overline{\frac{(\omega u_2)'(t)}{\omega(t)}})_H \omega(t)dt + (u_1, B u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= -\int_a^\infty (u_1(t)\overline{(\omega u_2)'(t))_H} \omega(t)dt + (u_1, B u_2)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= (u_1(t), -(\omega u_2)'(t))_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} + (u_1(t), B(t)u_2(t))_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= (u_1(t), -(\omega u_2)'(t) + B(t)u_2(t))_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
&= (u_1, l^+(u_2))_{L^2_\omega(H,(a,\infty))}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında $l(\cdot)$ quasi-diferansiyel ifadesinin formal adjointi

$$l^+(u_2(t)) = -(\omega u_2)'(t) + B(t)u_2(t) \tag{8}$$

olarak bulunur.

$L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında (7) ((8)) diferansiyel ifadesi tarafından doğurulan minimal operatör L_0 (L_0^+) ve maksimal operatör de L (L^+) şeklinde tanımlanır. Buradan $L_0 \subset L$ ve $L_0^+ \subset L^+$ ifadeleri doğrudur.

$\widetilde{L}$, $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında L_0 operatörünün bir maksimal akretif genişlemesi ise ve M_0 minimal operatörüne karşılık gelen genişlemesi $\widetilde{M}$ tarafından üretilen quasi-diferansiyel ifade

$$m(u) = i(\omega u)'$$

şeklindedir.

Buradan,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}u &= (\omega u)'(t) + Bu(t) \\
&= i(-i(\omega u)'(t)) + Bu(t) \\
&= i(-\widetilde{M})(t) + Bu(t) \\
&= i(-(Re\widetilde{M} + iIm\widetilde{M}))u(t) + Bu(t) \\
&= -i(Re\widetilde{M})u(t) + (Im\widetilde{M})u(t) + Bu(t) \\
&= (Im\widetilde{M} + B)u(t) - i(Re\widetilde{M})u(t)
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
(Re\widetilde{L}) &= (Im\widetilde{M}) + B \\
&= Im(\widetilde{M} + B)
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır.
Buradan $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayındaki L_0 minimal operatörünün tüm maksimal akretif genişlemelerini tanımlamak için,

$$s(u) = i(\omega u)' + Bu$$

quasi-diferansiyel ifade tarafından oluşturulan S_0 minimal operatörünün tüm maksimal genişlemelerini tanımlamak yeterlidir.
S_0 minimal operatörünün $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında tüm maksimal disipatif genişlemelerini bulmak için Calkin-Gorbachuk metodu kullanılsın. Ana sonuç için ihtiyaç duyulacak olan S_0 minimal operatörünün defekt sayıları bulunsun.

Teorem 12 : $L^2_\omega(a,\infty)$ uzayında S_0 minimal operatörünün defekt sayıları

$$(n_+(S_0), n_-(S_0)) = (dimH, dimH)$$

şeklindedir.

İspat : Hesaplamalarda kolaylık olması için $B = 0$ alalım. O zaman $t > \omega$ için

$$i(\omega u_\pm)'(t) \pm i u_\pm(t) = 0$$

diferansiyel denklemin çözümleri araştırılsın. İlk olarak $t > \omega$ için

$$i(\omega u_+)'(t) + i u_+(t) = 0, \quad t > \omega$$

diferansiyel denkleminin çözümü yapılsın. Verilen diferansiyel denklem gerekli işlemler altında

$$\begin{aligned}
(\omega u_+)'(t) + u_+(t) &= 0 \\
(\omega u_+)'(t) &= -u_+(t) \\
\int d\left(\frac{\omega u_+(t)}{u_+(t)}\right) &= -\int dt \\
\omega |Inu_+(t)| &= -\int dt + f \\
Inu_+(t) &= \frac{1}{\omega}(-\int dt + f) \\
u_+(t) &= e^{-\frac{1}{\omega}\int dt}\frac{1}{\omega} f
\end{aligned}$$

şeklinde olup, çözümü

$$u_+(t) = \frac{1}{\omega(t)} exp(-\int\limits_a^t \frac{ds}{\omega(s)}) f$$

elde edilir. Diğer taraftan $t > \omega$ için

$$(\omega u_-)'(t) - u_-(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümü yapılsın. Gerekli işlemler altında

$$(\omega u_-)^{'}(t) - u_-(t) = 0$$
$$(\omega u_-)^{'}(t) = u_-(t)$$
$$\int d\left(\frac{\omega u_-(t)}{u_-(t)}\right) = \int dt$$

$$\omega|Inu_-(t)| = \int dt + f$$
$$Inu_-(t) = \frac{1}{\omega}(\int dt + f)$$
$$u_-(t) = e^{\frac{1}{\omega}\int dt}\frac{1}{\omega}f$$

şeklinde olup, çözümü

$$u_-(t) = \frac{1}{\omega(t)} exp(\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)})f$$

olarak bulunur. Buradan

$$u_{\pm}(t) = \frac{1}{\omega(t)} exp(\mp\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)})f$$

elde edilir.

Bulunan çözümlerden,

$$\begin{aligned}
\|u_+(t)\|^2{}_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} &= \int_a^\infty \omega(t)\|u_+(t)\|^2{}_H dt \\
&= \int_a^\infty \left\|\frac{1}{\omega(t)} exp\left\{-\int_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right) ds\right\} f\right\|_H^2 \omega(t)dt \\
&= \int_a^\infty < \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{-\int_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right)\right\} f, \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{-\int_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right)\right\} f > \omega(t)dt \\
&= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{-2\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right\} dt\|f\|_H^2 \\
&= \int_\infty^a exp\left\{-2\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right\} d\left(\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) \|f\|_H^2 \\
&= \left(\frac{exp(-2\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)})}{-2} - \frac{1}{2}\right) \|f\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - exp(-2\int_a^\infty \frac{ds}{\omega s})\right) \|f\|_H^2 < \infty
\end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$n_+(S_0) = dimker(S+iI) = dimH$$

elde edilir.

Diğer taraftan $f \in H$ için

$$\begin{aligned}
\|u_-(t)\|^2{}_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} &= \int_a^\infty \omega(t)\|u_-(t)\|^2{}_H dt \\
&= \int_a^\infty \left\| \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{ \int_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)} \right) ds \right\} f \right\|_H^2 \omega(t)dt \\
&= \int_a^\infty < \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{ \int_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)} \right) \right\} f, \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{ \int_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)} \right) \right\} f > \omega(t)dt \\
&= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} exp\left\{ 2\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)} \right\} dt \|f\|_H^2 \\
&= \int_\infty^a exp\left\{ 2\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)} \right\} d\left(\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)} \right) \|f\|_H^2 \\
&= \left(\frac{exp(2\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)})}{2} - \frac{1}{2} \right) \|f\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(exp(2\int_a^\infty \frac{ds}{\omega s} - 1) \right) \|f\|_H^2 < \infty
\end{aligned}$$

olup buradan

$$n_-(S_0) = dimker(S-iI) = dimH$$

olduğu gösterilir. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Son teorem gösterir ki, minimal operatör bir maksimal disipatif genişlemeye sahiptir (Gorbachuk,1991). Şimdi tüm maksimal disipatif genişlemelerini tanımlamak için sınır değer uzaylarını yapılandırmak gerekir.

Lemma 8 : $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında S_0 minimal operatörü ve $u \in D(S)$ için γ_1 ve γ_2 fonksiyonları

$$\begin{aligned}
\gamma_1 : D(S) \to H,\ \gamma_1(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\omega u)(\infty) - (\omega u)(a)\right), \\
\gamma_2 : D(S) \to H,\ \gamma_2(u) &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\left((\omega u)(\infty) + (\omega u)(a)\right),\ u \in D(S)
\end{aligned}$$

formunda olmak üzere (H, γ_1, γ_2) üçlüsü bir sınır değerleri uzayıdır.

İspat : Keyfi iki $u,\ v \in D(S)$ alınsın. Buradan

$$
\begin{aligned}
& (Su,v)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} - (u,Sv)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
= & \left(i(\omega u)' + Bu, v\right)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} - \left(u, i(\omega v)' + Bv\right)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
= & (i(\omega u)', v)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} + (Bu,v) - (u, i(\omega v)')_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} - (u,Bv)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\
= & \left[(i(\omega u)', v)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} - \left(u, i(\omega v)'\right)_{L^2_\omega(H,(a,\infty))}\right] \\
= & \int_a^\infty (i(\omega u)'(t), v(t))_H \omega(t)dt - \int_a^\infty (u(t), i(\omega v)'(t))_H \omega(t)dt \\
= & \int_a^\infty (i(\omega u)'(t), v(t)\omega(t))_H dt - \int_a^\infty ((\omega(t)u(t), i(v(t)\omega(t))')_H dt \\
= & \ i\left[\int_a^\infty ((\omega u)'(t), v(t)\omega(t))_H dt + \int_a^\infty ((\omega(t)u(t), (v(t)\omega(t))')_H dt)\right] \\
= & \ i\int_a^\infty ((\omega(t)u(t), \omega(t)v(t))'_H dt \\
= & \ i[((\omega u)(\infty), (\omega v)(\infty))_H - ((\omega u)(a), (\omega v)(a))_H] \\
= & \ (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $f_1,\ f_2 \in H$ için

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(u) &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\omega u)(\infty) - (\omega u)(a)) = f_1, \\
\gamma_2(u) &= \frac{1}{i\sqrt{2}}((\omega u)(\infty) + (\omega u)(a)) = f_2,
\end{aligned}
$$

denklemlerinden

$$
(\omega u)(\infty) = \frac{(if_2 + f_1)}{\sqrt{2}} \quad \text{ve} \quad (\omega u)(a) = \frac{(if_2 - f_1)}{\sqrt{2}}
$$

eşitliklerini sağlayan $u \in D(S)$ fonksiyonunun varlığı araştırılsın.
Eğer $u(\cdot)$ fonksiyonu,

$$
u(t) = \frac{1}{\omega(t)}(1 - e^{a-t})\frac{(if_2 + f_1)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\omega(t)}e^{a-t}\frac{(if_2 - f_1)}{\sqrt{2}},
$$

şeklinde seçilirse, $u \in D(S)$ ve $\gamma_1(u) = f_1,\ \gamma_2(u) = f_2$ olduğu bulunur. Böylece ispat tamamlanır.
Calkin-Gorbachuk methodu yardımıyla, aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 13 : Eğer $\widetilde{S}$, S_0 minimal operatörünün $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayındaki maksimal disipatif genişlemesi ise, bu genişleme $s(\cdot)$ ifadesi ve $K : H \to H$ bir daralma operatörü olmak üzere,

$$(\omega u)(a) = K(\omega u)(\infty)$$

sınır şartı tarafından doğurulur. Üstelik $K : H \to H$ daralma operatörü $\widetilde{S}$ genişlemesi tarafından tek türlü ifade edilir, yani $\widetilde{S} = S_K$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.

İspat : S_0 operatörünün her $\widetilde{S}$ maksimal disipatif genişlemesi $s(\cdot)$ diferansiyel operatör ifadesi ve $V : H \to H$ olmak üzere

$$(V-I)\gamma_1(u) + i(V+I)\gamma_2(u) = 0$$

sınır şartı tarafından doğrulur. Lemma 8'den, $u \in D(\widetilde{S})$ için

$$(V-I)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)((\omega u)(\infty) - (\omega u)(a)) + i(V+I)\frac{1}{i\sqrt{2}}((\omega u)(\infty) + (\omega u)(a)) = 0$$

yani,

$$(V-I)\left(\frac{(\omega u)(\infty)}{\sqrt{2}} - \frac{(\omega u)(a)}{\sqrt{2}}\right) + (V+I)\left(\frac{(\omega u)(\infty)}{\sqrt{2}} + \frac{(\omega u)(a)}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

olup buradan gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$(\omega u)(a) = -V(\omega u)(\infty)$$

elde edilir. Eğer $K = -V$ seçilirse

$$(\omega u)(a) = K(\omega u)(\infty)$$

sonucuna ulaşılır. Teorem 13 ve bilinen bir sonuçtan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 14 : $\widetilde{L}$, L_0 minimal operatörünün maksimal akretif genişlemesi ise, bu genişleme $l(\cdot)$ ifadesi ve $K : H \to H$ daralma operatörü olmak üzere,

$$(\omega u)(a) = K(\omega u)(\infty)$$

sınır şartı tarafından doğurulur. Üstelik $K : H \to H$ daralma operatörü $\widetilde{L}$ tarafından tek türlü ifade edilir. Yani $\widetilde{L} = L_K$ ve bu önermenin tersi de doğrudur.
Böylece $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında L_0 operatörünün L_K maksimal akretif genişlemelerinin spektrum yapısı incelenebilir. Şimdi bu spektrum yapıya ait sonuç verilsin.

Teorem 15 : $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ ağırlıklı Hilbert uzayında L_0 minimal operatörünün L_K akretif genişlemesinin spektrumu

$$\mu \in \sigma\left(Kexp\left(-B\int\limits_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)\right)$$

olmak üzere

$$\sigma(L_K) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \left(\int\limits_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)^{-1} (ln|\mu|^{-1}) + iarg(\overline{\mu}) + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

şeklindedir.

İspat : $L^2_\omega(H,(a,\infty))$ uzayında L_K operatörünün spektrum problemi $f \in L^2_\omega(H,(a,\infty))$ olmak üzere

$$L_K(u) = \lambda u + f,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda_r = Re\lambda \geq 0$$

ele alınsın. Buradan

$$(\omega u)'(t) + B(t)u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad t > a$$

buradan,

$$(\omega u)'(t) = \frac{1}{\omega(t)}(\lambda I - B)(\omega u)(t) + f(t), \quad t > a$$

diferansiyel operatör ifadesi elde edilir. Buradan çözüm

$$\begin{aligned} u(t;\lambda) &= \frac{1}{\omega(t)}exp\left\{(\lambda I - B)\left(\int\limits_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right)\right\} f_\lambda \\ &\quad -\frac{1}{\omega(t)}\int\limits_t^\infty exp\left\{(\lambda I - B)\int\limits_s^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)}\right\} f(s)ds, \end{aligned}$$

$f_\lambda \in H$ olarak bulunur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{1}{\omega(t)}exp\left\{(\lambda I - B)\int\limits_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right)\right\} f_\lambda\right\|^2_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} \\ &= \int\limits_a^\infty \left\|\frac{1}{\omega(t)}exp\left\{(\lambda I - B)\int\limits_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right)\right\} f_\lambda\right\|^2_H \omega(t)dt \\ &= \int\limits_a^\infty < \frac{1}{\omega(t)}exp\left\{(\lambda I - B)\int\limits_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right)\right\} f_\lambda, \frac{1}{\omega(t)}exp\left\{(\lambda I - B)\int\limits_a^t \left(\frac{d(s)}{\omega(s)}\right)\right\} f_\lambda > \omega(t)dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} exp(2\lambda_r \int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}) < exp\left(-B\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) f_\lambda, exp\left(-B\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) f_\lambda >_H dt$$

$$= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} exp(2\lambda_r \int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}) \left\| exp\left(-B\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) f_\lambda \right\|_H^2 dt$$

$$\leq \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} exp\left(2\lambda_r \int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) dt \|f_\lambda\|^2{}_H$$

$$= \int_a^\infty exp\left(2\lambda_r \int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) d\left(\int_a^t \frac{ds}{\omega(s)}\right) \|f_\lambda\|^2{}_H$$

$$= \left(\frac{exp(2\lambda_r \int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)})}{2\lambda_r} - \frac{1}{2\lambda_r}\right) \|f_\lambda\|_H^2$$

$$= \frac{1}{2\lambda_r}\left(exp(2\lambda_r \int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)} - 1)\right) \|f_\lambda\|_H^2 < \infty$$

ve

$$\left\| -\frac{1}{\omega(t)} \int_t^\infty exp\left\{(\lambda I - B)\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} f(s)ds \right\|^2_{L^2_\omega(H,(a,\infty))}$$

$$= \int_a^\infty \left\| \frac{1}{\omega(t)} \int_t^\infty exp\left\{(\lambda I - B)\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} f(s)ds \right\|_H^2 \omega(t)dt$$

$$= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} \left\| \int_t^\infty exp\left\{(\lambda I - B)\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} f(s)ds \right\|_H^2 dt$$

$$= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} \left\| \int_t^\infty exp\left\{\lambda I\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} exp\left\{-B\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} f(s)ds \right\|_H^2 dt$$

$$= \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} \left\| \int_t^\infty exp\left\{(\lambda_r + i\lambda_i)\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} exp\left\{-B\int_s^t \left(\frac{d(\tau)}{\omega(\tau)}\right)\right\} \frac{1}{\sqrt{\omega(s)}}(\sqrt{\omega(s)}f(s))ds \right\|_H^2 dt$$

$$\leq \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} \left(\int_a^\infty \frac{1}{\omega(s)} exp(2\lambda_r \int_s^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)})\right) \left(\int_a^\infty \omega(s)\|f\|^2{}_H ds\right) dt$$

$$\leq \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} \left(\int_a^\infty \frac{1}{\omega(s)} exp(2\lambda_r \int_s^t \frac{d\tau}{\omega(\tau)})ds\right) \left(\|f\|^2{}_{L^2_\omega(H,(a,\infty))}\right) dt$$

$$= exp\left(2\lambda_r \int_a^\infty \frac{d\tau}{\omega(\tau)}\right) \int_a^\infty \frac{1}{\omega(t)} \|f\|^2_{L^2_\omega(H,(a,\infty))} < \infty.$$

Şimdi verilen problemde sınır şartları çözümde yerine yazılırsa

$$I-\int_a^\infty exp\left((\lambda I-B)\int_s^a \frac{d\tau}{\omega(\tau)}\right)f(s)ds = Kexp\left((\lambda I-B)\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)f_\lambda$$

olup

$$\left(I-Kexp\left((\lambda I-B)\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)f_\lambda\right)=\int_a^\infty exp\left((\lambda I-B)\int_s^a \frac{d\tau}{\omega(\tau)}\right)f(s)ds$$

elde edilir. Böylece $\lambda\in(L_K)$ olması için gerekli ve yeter şartın

$$I-Kexp\left((\lambda I-B)\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)f_\lambda=0$$

olup

$$exp{-}\lambda\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}=\mu\in\left(Kexp\left(-B\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)\right)$$

olduğu bulunur. Buradan

$$-\lambda\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}=In\mid\mu\mid+iarg(\mu)+2m\pi i,\quad m\in\mathbb{Z}$$

$$\lambda=\left(\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)^{-1}\left(In\mid\mu\mid^{-1}+iarg(\overline{\mu})+2n\pi i\right),\quad n\in\mathbb{Z}$$

olup

$$\mu\in\sigma\left(Kexp\left(-B\int_a^\infty \frac{ds}{\omega(s)}\right)\right)$$

olduğu elde edilmiş olur. Bu ise ispatı tamamlar.

3. Bölüm

ÖRNEKLER

Örnek 3.1: $L^2_{e^t}(0,1)$ uzayında

$$l(v) = iv^{'}(t) + arctan(t)v(t) \tag{9}$$

diferansiyel ifadesi ele alınsın. (9) ifadesi tarafından üretilen minimal operatörü L_0 ve tüm maksimal akretif genişlemeleri $L_{r,\varphi}$ ile ifade edilsin. Bu $L_{r,\varphi}$ maksimal akretif genişlemeleri $\mid r \mid \leq 1$ ve $0 \leq \varphi < 2\pi$ olmak üzere

$$v(0) = re^{i\varphi + \frac{1}{2}}v(1) \tag{10}$$

sınır şartı tarafından tanımlanır.
Üstelik, bu genişlemelerin spektrumu

$$\lambda \in \sigma \left(re^{i\varphi + \dfrac{1}{2}e^{i\int\limits_0^1 arctan(t)dt}} \right)$$

olmak üzere

$$\sigma(L_{r,\varphi}) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = arg(\lambda) + 2m\pi + i(ln|\lambda|^{-1}),\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

$$= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \varphi + \frac{\pi}{4} - In\sqrt{2} + 2m\pi + iln|\frac{1}{\mid r \mid \sqrt{e}},\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$$

şeklindedir.

Örnek 3.2: $L^2_{t^\omega}((0,1) \times (1,\infty))$ uzayında

$$l(u) = (t^\omega u(t,x))^{'} + Bu(t,x), \quad \omega > 1 \tag{11}$$

diferansiyel ifadesi ele alınsın.(11) ifadesi tarafından üretilen minimal operatörü L_0 ve tüm maksimal akretif genişlemeleri L_r ile ifade edilsin. Bu L_r maksimal akretif genişlemeleri

$$B : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1), \quad Bv(x) = xv(x)$$

$$(t^\omega u(t,x))(1) = r(t^\omega u(t,x))u(\infty), \quad 0 < r < 1, \quad 0 < x < 1, \tag{12}$$

sınır şartı tarafından tanımlanır.
Üstelik, bu genişlemelerin spektrumu

$$\sigma(L_r) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \mu = (1-\omega)(ln|\lambda|^{-1}) + iarg(\overline{\lambda}) + 2n\pi i,\ n \in \mathbb{Z},\ \lambda \in \sigma\left(rexp(\frac{B}{\omega - 1})\right)\right\}$$

şeklindedir.

4. Bölüm

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ağırlıklı Hilbert uzayında alınan birinci mertebeden diferansiyel operatör ifadeleri incelenmiştir. Bu ifadelerin minimal operatörleri oluşturulmuş ve disipatif-akretif genişlemeleri ifade edilmiştir. Bu genişlemeler ayrıca sınır değerleri dilinde ifade edilmiştir. Ele alınan genişlemelerin spektral yapıları incelenmiştir. Ayrıca alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Bu tez süresince aşağıdaki belirtildiği gibi bazı önerilerde bulunulabilinir:

1. Bu tez boyunca bakılan problemler direkt toplam Hilbert uzaylarının üzerinde yeni bir araştırma konusu olabilir.

2. Tezde incelenen genişlemelerin spektrumları için daha güçlü sonuçların alınması konusu araştırılabilir.

3. Bu tez çalışmasına konu olan dört ana diferansiyel operatör ifadesi de sol yarı eksende incelenebilir ve ilk üç diferansiyel operatör ifadesinin sağ yarı eksende incelenmesi de ayrı bir çalışma konusu olabilir.

4. Dördüncü bölüm aralığın singüler olması bakımından diğer bölümlerden farklı olarak değerlendirilebilir.

5. Diğer bölümlerde alınan aralığın singüler olması durumu da ayrı bir çalışma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

Akbaba, Ü. ve İpek Al, P. (2021). Maximally Accretive Differential Operators of First Order in the Weighted Hilbert Spaces. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42 (12), 2707-2713.

Albeverio, S., Gesztesy, F., Hoegh-Krohn, R. ve Holden, H. (2005). *Solvable models in quantum mechanics*. New-York: Springer.

Aliprantis, D. ve Burkinshaw, O. (1998). *Principles of Real Analysis*. New York: Academic Pres.

Fischbacher, C. (2017). *On the Theory of Dissipative Extensions*, PhD Thesis, Universtiy of Kent School of Mathematics, Statistic and Actuarial Science, Canterbury.

Gorbachuk, V. I. ve Gorbachuk, M. L. (1991). *Boundary Value Problems for Operator Differential Equations*, Dordrecht, the Netherlends: Kluwer Academic Publishers.

İpek Al, P. (2018). Description of Maximally Dissipative Quasi-Differential Operators for First Order. *Sakarya University Journal of Science*, 22, 1651-1658.

İpek, P. ve Ismailov, Z. (2018). Maximal accretive singular quasi-differential operators. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(5), 1120-1127.

İpek Al, P. ve İsmailov, Z. (2019). The General Form of Maximally Accretive Quasi-Differential Operatorsfor First Order (pp.299-311). Switzerland: Springer.

İpek, P. ve Ismailov, Z. (2020). First order maximally dissipative singular differential operators. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 69(1), 929-940.

İpek Al, P. ve İsmailov, Z. (2021). First order selfadjoint differential operators with involution. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 496-501.

İpek Al, P. ve Akbaba, Ü. (2020). On the Compactly Solvable Differential Operators for First Order. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 41(6), 1078-1086.

İpek Al, P. ve Akbaba, Ü. (2021). Maximally Dissipative Differential Operators of First Order in the Weighted Hilbert Spaces. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(3), 490-495.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons.

Nagy, B. Sz. ve Foias, C. (1970). *Analyse Harmonique des Operateurs de L'espace de Hilbert*. Budapest: Akad. Kiadó.

Narici, L. ve Bachmann, G. (1972). *Functional Analysis*. London: Academic Press, Inc.

Neumann, J.von (1929-1930). Allgemeine eigenwerttheories hermitescher funktioneloperatoren. *Mathematische Annalen*, 102, 49-131.

Öztürk Mert, R., Ismailov, Z. ve İpek Al, P. (2020). Dissipative canonical type differential operators for first order.

Turkish Journal of Mathematics, 44(2), 481-490.

Öztürk Mert, R., Ismailov, Z. ve İpek Al, P. (2020). Representation of all maximally accretive differential operators for first order. *Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology* , 22(2), 439-447.

Öztürk Mert, R. (2020). Representation of all maximally dissipative multipoint differential operators for first order. *Lobachevskii Journal of Mathematics* , 41(9), 1854-1863.

Öztürk Mert, R. (2021). General Form of Maximally Dissipative Differential Operators of First Order in the Weighted Hilbert Spaces. *Journal of Analysis and Number Theory* , 9(2), 13-17.

Rofe-Beketov, F. S. ve Kholkin, A. M. (2005). *Spectral Analysis of Differential Operators*. USA: World Scientific Monograph Series in Mathematics,(7).

Rynne, B. ve Youngson, M. A. (2007). *Linear Functional Analysis*. Springer Science and Business Media.

Zettl, A. (2005). *Sturm- Liouville Theory, Vol. 121 of Mathematical Survay and Monographs*. USA: Am Math. Soc.