T.C.

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

Yüksek Lisans Tezi

Hasan AKGÜL

Çorum – 2022

KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

Hasan AKGÜL

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

TEZ DANIŞMANI

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ

Çorum 2022

Hasan AKGÜL tarafından hazırlanan "Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Uygulamaları" adlı tez çalışması 25/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Haydar ALICI ……………………………………

Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ ……………………………………

Dr. Öğr. Üyesi Rukiye Öztürk MERT ……………………………………

Hitit Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun …/…/…… tarih ve …………….. sayılı kararı ile ………………………..'ın …………………. Anabilim Dalında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Prof. Dr. Muhammed Asıf YOLDAŞ

Lisansüstü Eğitim Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan ederim.

Hasan AKGÜL

KONFLUENT HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE UYGULAMALARI

Hasan AKGÜL

ORCID: 0000-0002-6459-1589

HİTİT ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Yüksek Lisans Tezi

Ocak 2022

ÖZET

Bu çalışmada hipergeometrik fonksiyonların bir alt grubu olan konfluent hipergeometrik fonksiyonlar ve bu fonksiyonların uygulamaları incelenmiştir. Öncelikle hipergeometrik diferansiyel denklemin genel yapısı ortaya konulmuş ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Hipergeometrik diferansiyel denklemde kullanılan özel dönüşümler yardımıyla konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem oluşturulmuştur. Bu denklemin çözümleri olarak kabul edilen konfluent hipergeometrik fonksiyonların integral ve seri gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin kuantum fizikteki bazı uygulamaları araştırılmıştır. Bununla birlikte taktik füze sistemi modellenmesi sonucu elde edilen denklem sistemlerinin belirli varsayımlar ve dönüşümler yardımıyla konfluent diferansiyel denkleme dönüştürülebileceği gösterilmiş ve çözümleri konfluent hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hipergeometrik diferansiyel denklem, konfluent fonksiyonlar, integral ve seri gösterimleri, taktik füze sistemi.

Bilim Kodu: 20406

CONFLUENT HYPERGEOMETRİC FUNCTIONS AND ITS APPLICATION

Hasan AKGÜL

ORCID: 0000-0002-6459-1589

HİTİT UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL

Master of Science Thesis

January 2022

ABSTRACT

In this study, confluent hypergeometric functions which are considered as a subgroup of hypergeometric functions, and their applications are investigated. First of all, the general structure of hypergeometric differential equation is presented and its some properties are mentioned. Confluent hypergeometric differential equation was established from hypergeometric differential equation with the help of special transformations. Integral and series representations of confluent hypergeometric functions which are accepted as solutions of confluent hypergeometric differential equation are obtained. In addition, some applications of the confluent hypergeometric differential equation in quantum physics are investigated. Moreover, it has been shown that the equation system obtained from tactical missile system modeling can be converted into confluent differential equation by means of certain assumptions and transformations, and their solutions are expressible in terms of confluent hypergeometric functions.

Key Terms: Hypergeometric differential equation, confluent functions**,** integral and series representations, tactical missile system.

Science Code: 20406

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında bana zaman ayırıp değerli bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan, yol gösteren ve manevi desteğini esirgemeyip bana sabırla tahammül eden değerli hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Hüseyin ALTUNDAĞ'a, her zaman bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Hasan AKGÜL

Bu çalışma, Hitit Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir.
Proje No: FEF19004.21.004

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

(β_n)	Pochhammer sembolü
${}_2F_1(\alpha,\gamma;\beta;z)$	Hipergeometrik fonksiyon
${}_1F_1(\alpha,\gamma;z)$	Konfluent hipergeometrik fonksiyon
$J_\gamma(x)$	Bessel fonksiyonu
$\beta(x,y)$	Beta fonksiyonu
Γ_n	Gamma fonksiyonu
h	Planck sabiti
$\hbar=\frac{\mathrm{h}}{2\pi}$	Evrensel sabit
E	Kinetik enerjisini
P_l	Legendre polinomları

Kısaltmalar

PN	Oransal Navigasyon (Proportional Navigation)
PNG	Oransal Navigasyon Kılavuzu (Proportional Navigation Guidance)

GİRİŞ

Hipergeometrik diferansiyel denklem Euler (1769) tarafından tanımlanmıştır. Gauss (1813), yaptığı çalışmalarda Euler' in hipergeometrik diferansiyel denklemini, α, β, γ gerçel veya kompleks sabitler olmak üzere

$$z(1-z)y^{''} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]y^{'} - \alpha\beta y = 0$$

formunda yazmıştır (Gauss, 1813).

Euler' in tanımladığı hipergeometrik denklemde, Gauss' un yapmış olduğu dönüşümden farklı bir dönüşüm uygulanarak

$$zy^{''} + (\gamma - z)y^{'} - \alpha y = 0$$

formunda konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem elde edilir (Kummer, 1836). Bu denklem Kummer denklemi olarak da bilinmektedir. 'Konfluent' kelimesi 'birlikte akan, birleşen, birleşik' anlamlarında kullanılmaktadır. Matematikte ise konfluent terimi, hipergeometrik diferansiyel denklemin sahip olduğu düzgün tekil noktaların birleştirilmesini ifade etmektedir. Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü, hipergeometrik fonksiyon $M(\alpha, \gamma, z)$ ile sembolize edilmiştir (Kummer, 1836). Kummer, konfluent hipergeometrik fonksiyonu, mutlak yakınsak sonsuz kuvvet serileri ile tanımlamıştır. Bu fonksiyon birinci tip konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olarak bilinmektedir. Kummer denklemi olarak da bilinen konfluent diferansiyel denklemin çözümleri integral gösterimler ile de yazılabilmektedir (Abramowitz, 1970).

Edmund Taylor Whittaker, z değişkenine bağlı konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemi, γ, k ve μ gerçel veya karmaşık sabitler olmak üzere,

$$y = z^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{z}{2}} w$$

dönüşümü yaparak w değişkeni ile

$$\frac{d^2w}{dz^2} + (-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2})w = 0$$

formunda elde etmiştir (Whittakker ve Watson, 1920). Bu denklem kaynaklarda Whittaker denklemi olarak yer almaktadır (Erdélyi, 1955).

Francesco Tricomi, konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin bir başka çözümünü $M(\alpha, \gamma, z)$ hipergeometrik fonksiyonu ile ilişkili şekilde elde etmiştir (Tricomi, 1947). Tricomi tarafından yapılmış olan bu çözüm ikinci tür konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olarak bilinmektedir.

Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem ile matematik, fizik, istatistik gibi birçok alanda karşılaşılmaktadır. Örneğin, matematiksel fizikte; manyetik dalgalar (Georgiev , Georgieva

2005), optik (Augustyniak ve ark., 2020) gibi farklı alanlarda konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemlerin uygulandığı örnekler vardır. Kuantum fiziğinde; Coulomb dalga fonksiyonları, Schrödinger dekleminin (Schiff, 1949) çözümlerinin elde edilmesi konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin uygulama alanları içinde yer almaktadır. Askeri alanda yapılan hesaplamalarda konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin uygulandığı örnekler bulunmaktadır. Matematikte; bazı özel polinomlar ve çok sayıda uygulamalarında, olasılık teorisi ve matematiksel istatistik alanlarda kullanılmaktadır. Taktik füze teorisine dayalı olarak hedef arama kılavuz sisteminde konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem türetilebilir. W. S. Na ve I. H. Hwang, birinci derece dinamik gecikmeyi dikkate alarak

$$y^{''}(t)+\frac{1}{\tau}y^{'}(t)+\frac{N}{\tau(t_f-t)}y(t)=c_0$$

biçiminde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem elde etmişlerdir. Bu denklem boyutsuzlaştırıldıktan sonra uygulanacak dönüşümler ile

$$xw^{''}(x)+(2-x)w^{'}(x)-(1-N)w(x)=\epsilon c$$

konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem olarak yazılır (Ko, 2011).
Bu tez çalışmasında; birinci bölümünde fonksiyon, türev ve diferansiyel denklemler hakkında genel bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde hipergeometrik diferansiyel denklem ve çeşitlerinden bahsedilmektedir. Ayrıca hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olan hipergeometrik fonksiyon ile ilgili bazı teoremler açıklanmaktadır. Üçüncü bölüm içerisinde hipergeometrik diferansiyel denkleme uygulanacak dönüşümle konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin elde edilmesi çalışılacaktır. Oluşturulan denklemin integral çözümlerinin bulunması açıklanmaktadır. Üçüncü bölümde elde edilen çözümler kullanılarak dördüncü bölüm içersinde uygulamalara yer verilmektedir. Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin, kuantum fizikteki bazı uygulamalarının çözümlerinin bulunması gösterilmektedir. Gerçek hayat problemi olarak orantılı navigasyon sistem ile hedef arama kılavuzunda, birinci dereceden dinamik gecikme gözönüne alınarak yazılan diferansiyel denklemin konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleme dönüştürülmesi çalışılacaktır. Bu denklemin, üçüncü bölümde elde edilen integral çözümler ile genel çözümü araştırılmaktadır.

1. Bölüm

GENEL TANIMLAR

1.1. Karmaşık Sayılar

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ sanal sayı birimi $i^2 = -1$ olmak üzere $z = x + yi$ şeklinde yazılabilen sayılara karmaşık sayılar denir. Bu sayıların oluşturduğu kümeye ise karmaşık sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}$ sembolü ile gösterilir. Karmaşık sayılar kümesi

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

olarak yazılır.
x sayısına z karmaşık sayısının gerçel (reel) kısmı denir ve $Re(z) = x$ ile gösterilir.
y sayısına z karmaşık sayısının sanal (imajiner) kısmı denir ve $I_m(z) = y$ ile gösterilir.
$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olup her gerçel sayı aynı zamanda bir karmaşık sayıdır.
$i = \sqrt{-1}$ sanal biriminin kuvetleri

- $i^0 = 1$
- $i^1 = \sqrt{-1}$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

olarak yazılır.

1.2. Karmaşık Sayının Kutupsal Gösterimi

$z = x + yi$ vektörünün pozitif reel eksenle yaptığı açıya θ diyelim.

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$

olmak üzere

$$z = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ifadesine karmaşık sayının kutupsal gösterimi denir. θ' ya z' nin argümenti denir ve $argz$ ile gösterilir. Eğer $-\pi < \theta < \pi$ kısıtlaması yapılırsa bu durumda θ ya z' nin esas argümenti denir ve $Argz$ ile gösterilir.

1.3. Fonksiyon

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. X kümesinin her x elemanını Y kümesinin bir ve yalnız bir y elemanı ile eşleyen her kurala X' ten Y' ye fonksiyon denir. Sembolik olarak

$$y = f(x), \quad f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y$$

olarak gösterilebilir.

1.4. Limit

x_0 ve L birer gerçel sayı ve $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. İstenildiği kadar küçük, keyfi seçilmiş $\varepsilon > 0$ sayısına $0 < |x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan $x \in X$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı karşı getirilebiliyorsa, x noktası x_0 noktasına yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonunun limiti L' dir denir. $f(x)$ fonksiyonunun x_0' daki limiti (L):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ile gösterilir.

1.5. Süreklilik

X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to Y$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ değerleri için öyle $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki bütün

$$|x - x_0| < \delta \text{ iken } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

eşitsizliği doğru ise $f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasındaki süreklidir denir. $f(x)$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için sürekli ise $f(x)$ sürekli fonksiyondur.

1.6. Türev

f fonksiyonu, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kapalı veya $(a, b) \subset \mathbb{R}$ açık aralığı üzerinde tanımlı olsun. Bu aralığa ait bir $x_0 \in (a, b)$ noktasında değişkendeki pozitif ya da negatif Δx artışına karşılık gelen fonksiyonun artışı Δy olsun. Bu iki artışın oranı

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

olarak yazılır. Bu oranın Δx sıfıra giderken bir L limiti varsa, bu L sayısına $y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve $f^{'}(x_0)$ ile gösterilir.

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

ile yazılır.

- Zincir Kuralı
  t bağımsız değişkenine bağlı bir fonksiyon $x(t)$ olsun. f fonksiyonu $x(t)$ değişkenine bağlı olsun. Bu durumda f fonksiyonun $x(t)$ bağımlı değişkenine göre birinci mertebeden türevi
  $$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$
  ve ikinci mertebeden türevi
  $$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}(\frac{dx}{dt})^2 + \frac{df}{dx}\frac{d^2 x}{dt^2}$$
  olarak elde edilir.

1.7. Taylor Kuvvet Serisi

x_0 gerçel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere $y = f(x)$ fonksiyonu $r \in \mathbb{R}^+$ için $[x_0 - r, x_0 + r]$ aralığında sürekli, n. mertebeden türevli ve $(x_0 - r, x_0 + r)$ aralığında $(n+1)$. mertebeden türeve sahip ise

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

açılıma Taylor serisi denir.

1.8. Mutlak Yakınsak Seri

Bir $\sum a_n$ serisi verilsin. Bu serinin terimlerinin mutlak değerlerinden oluşturulan seri

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

yakınsak ise $\sum a_n$ serisi mutlak yakınsaktır.

1.9. Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemler $y = f(x)$ olmak üzere y' nin türevi veya türevleri alınmış fonksiyon bulunduran denklem türlerine denir. Diferansiyel denklemlerin çözümündeki amaç ise türevi alınmış olan bu $y = f(x)$ fonksiyonun tespit edilmesidir.

1.9.1. Diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması

Diferansiyel denklemler dört ana başlık altında sınıflandırabilir.

- Adi diferansiyel denklemler ya da kısmi diferansiyel denklemler
  - Adi diferansiyel denklemler tek bağımsız değişkenli fonksiyonların türevlerini içeren diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemler
    $$F(x, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \dots, y^n) = 0$$
    olarak gösterilir.

– Kısmi diferansiyel denklem, birden fazla bağımsız değişkenli fonksiyonların türevlerini içeren denklemlere denir.
Örnek:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

- Mertebesine göre diferansiyel denklemler

  Diferansiyel denklemdeki türevlerin en yüksek mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir.

- Homojen olan ya da homojen olmayan diferansiyel denklemler

  $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^n) = 0$ fonksiyonu, $y, y', y'', y''', \dots, y^n$ ifadelerinin her birine göre doğrusal olduğunda diferansiyel denklemi

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + p_2(x)y^{n-2} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

  olarak yazılabilir. Bu denkleme n. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem denir. Belirli bir aralıkta tanımlı $p_i(x)$ fonksiyonları $(i = 1, 2, \dots, n)$ diferansiyel denklemin katsayıları, $f(x)$ fonksiyonu bağımsız terim diye adlandırılır. $f(x) \equiv 0$ durumunda denkleme homojen diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Sağ taraf sıfıra denk değilse homojen olmayan diferansiyel denklem adı verilir.

- Doğrusal olan ya da doğrusal olmayan diferansiyel denklemler

$$y^n + p_1(x)y^{n-1} + p_2(x)y^{n-2} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

  denkleminde tüm $p_i(x)$ fonksiyonları $(i = 1, 2, \dots, n)$ sabit olduğunda bu denkleme sabit katsayılı n. mertebeden doğrusal diferansiyel denklem adı verilir. Bir diferansiyel denklem doğrusal değilse bu defa n. mertebeden doğrusal olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

1.9.2. Birinci dereceden diferansiyel denklemlerin çözümleri için bazı yöntemler

Tanım: n sayıda keyfi sabite bağlı $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ fonksiyonu, diferansiyel denklemi sağlıyorsa ve varsa başlangıç koşullarının her birine göre tek değerli olarak bulunabiliyorsa $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ fonksiyonu diferansiyel denklemin genel çözümüdür denir. Sabitlerin çeşitli değerlerinde, genel çözümden elde edilen çözümlere özel çözümler denir.

- Ayrılabilir diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

şeklinde yazılabilen denklemlere değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemler denir. $N(y) \neq 0$ ve $P(x) \neq 0$ olan yerlerde her iki taraf $N(y).P(x)$ ile bölünerek

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C$$

integralleri yazılabilir. Bu integraller alınarak genel çözüm elde edilir.

- Tam diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri

  $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ analitik düzlemde herhangi D bölgesinde gerekli koşulları sağlayan fonksiyonlar olmak üzere

  $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

  diferansiyel denklemi

  $$M_y(x,y) = N_x(x,y) \tag{2}$$

  şartını sağlıyorsa (1) denklemine tam diferansiyel denklemdir denir.
  Denklemin çözümü $F(x,y) = C$ olsun. Bu çözümün her iki tarafını da diferansiyellediğimizde

  $$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

  denklemini elde ederiz. Bu denklem x değişkenine göre integrallendiğinde (2) eşitliğinden

  $$F(x,y) = \int_x M_y(x,y) + h(y) \tag{3}$$

  yazılır. Elde edilen denklemin her iki tarafını y' ye göre türevlediğimizde

  $$N(x,y) = \left(\int_x M_y(x,y) \right)_y + \frac{dh(y)}{dy}$$

  $h(y)$ çözümü bulunur. Son olarak $h(y)$ çözümünü (3) eşitliğinde yerine yazarsak tam diferansiyel denklemin çözümünü elde etmiş oluruz.

- İntegral çarpanı ile çözülen diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri
  Eğer (1) denklemi tam diferansiyel denklem değilse

  $$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

  eşitliğini sağlayacak uygun bir $\mu(x,y)$ integrasyon çarpanı bulunur. Bu integrasyon çarpanı ile (1) denklemi çarpılarak

  $$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

  formunda tam diferansiyel denklem elde edilir. μ integrasyon çarpanı hakkında daha fazla bilgi için (Ince, 1956) kaynağı incelenebilir. Yazılmış olan son denklemin çözümüne ulaşmak için daha önceden anlatılan adımlar uygulanır.

- Dönüşüm gerektiren diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri

- Bernoulli denklemi

$$y^{'} + p(x)y = f(x)y^{(a)}, \quad (a \in \mathbb{R})$$

  şeklindeki diferansiyel denkleme Bernoulli denklemi denir. $a = 0$ için doğrusal denkleme dönüşür. $a = 1$ için doğrusal homojen denkleme ve değişkenlerine ayrılabilen denkleme dönüşür.

- Riccati diferansiyel denklemi

$$y^{'} + p(x)y + q(x) = f(x)y^2$$

  biçimindeki diferansiyel denkleme Ricatti denklemi denir.
  Bu denklemlerin çözümlerini elde etmek için uygun dönüşümler yapılarak daha önce anlatılan yöntemler uygulanır.

1.9.3. Adi nokta ve tekil nokta

$P_0(x)$, $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ ortak çarpanı bulunmayan polinomlar olsun. İkinci mertebeden homojen diferansiyel denklem olarak

$$P_0(x)y^{''} + P_1(x)y^{'} + P_2(x)y = 0 \qquad (4)$$

alalım. Eğer $x = x_0$ noktasında $P_0(x_0) \neq 0$ oluyorsa x_0 noktasına adi nokta denir. $P_0(x_0) = 0$ oluyorsa da x_0 noktasına tekil nokta denir.

- Homojen diferansiyel denklem için

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{P_0(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P_2(x)}{P_0(x)}$$

  limitleri sonlu bir değer olarak bulunabiliyorsa x_0 noktası (4) denkleminin düzgün tekil noktasıdır denir.

- Eğer bir denklemin tekil noktası düzgün tekil nokta değilse o noktaya denklemin düzgün olmayan tekil noktası denir.

1.10. Gamma ve Beta Fonksiyonlarının Bazı Özellikleri

1.10.1. Gamma fonksiyonlarının bazı özellikleri

Gamma fonksiyonu Euler integrali ile karmaşık düzlemde $z \in \mathbb{C}$,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-z} dt \tag{5}$$

olarak genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır. Bu integral $Re(z) > 0$ için yakınsaktır (Taşeli, 2003). Gamma fonksiyonunun sağladığı eşitliklerden bazıları aşağıda bulunmaktadır.

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ve $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n-1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
- n negatif olmayan tam sayı olmak üzere $\Gamma(n+1) = n!$

1.10.2. Beta fonksiyonlarının bazı özellikleri

Beta fonksiyonu kompleks düzlemde $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad Re(x) > 0, Re(y) > 0 \tag{6}$$

olarak genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır. Beta fonksiyonunun bir diğer tanımı da

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

olarak verilir.

- Beta fonksiyonu değişkenlerine göre simetrik bir fonksiyondur. Yani,

$$\beta(x,y) = \beta(y,x)$$

eşitliğini sağlar.

Gama ve Beta fonksiyonları hakkında daha fazla bilgi için (Altın, 2011) ve (Abramowitz, 1970) kaynaklarına bakılabilir.

2. Bölüm

HİPERGEOMETRİK DİFERANSİYEL DENKLEM

2.1. Pochhammer Sembolü

β gerçel ya da kompleks bir sayı, n ise sıfır ya da pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n-1) \tag{7}$$

ifadesi Pochhammer sembolü olarak biliniyor (Altın, 2011). Pochhammer sembolü β' dan başlayıp birer artırılarak n tane terimin çarpımı olarak ifade edilir.
Γ fonksiyonunun $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ özelliğini kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\beta)_1 &= \beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} \\
(\beta)_2 &= \beta(\beta+1) = (\beta)_1(\beta+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(\beta+1) = \frac{\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\beta)} \\
(\beta)_3 &= \beta(\beta+1)(\beta+2) = (\beta)_2(\beta+2) = \frac{\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\beta)}(\beta+2) = \frac{\Gamma(\beta+3)}{\Gamma(\beta)}
\end{aligned}$$

adımları devam ettirildiğinde (β_n),

$$(\beta)_n = (\beta)_{n-1}(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\beta)}(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \tag{8}$$

olarak yazılır. Burada $(\beta)_0 = 1$ özel olarak kabul edilmektedir. Bu durumda Pochhammer sembolü, (7) ve (8) eşitlikleri kullanılarak

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1)(\beta+2)...(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \tag{9}$$

formunda tanımlanabilir.

2.2.Hipergeometrik diferansiyel denklem ve hipergeometrik fonksiyon

Genelleştirilmiş hipergeometrik diferansiyel denklem, $\widetilde{\tau}(z)$ derecesi en fazla 1 olan polinomu, $\sigma(z)$ ve $\widetilde{\sigma}(z)$ derecesi en fazla 2 olan polinomları ile

$$\sigma(z)u^{''} + \widetilde{\tau}(z)u^{'} + \frac{\widetilde{\sigma}(z)}{\sigma(z)}u = 0 \quad , \quad (u^{'} = \frac{du}{dz}, z \in \mathbb{C}) \tag{10}$$

şeklinde yazılabilir. Son denklemde $u = \Phi(z)y$ dönüşümü uygulanarak

$$\sigma(z)y^{''} + \tau(z)y^{'} + \lambda y = 0 \tag{11}$$

hipergeometrik diferansiyel denklem elde edilir. Hipergeometrik denklemin çözümlerine hipergeometrik fonksiyon adı verilir. α, β, ve γ sabit olmak üzere hipergeometrik fonksiyon ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ sembolü ile gösterilir (Taşeli, 2003). ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ fonksiyonu

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}$$

biçiminde kuvvet serisi ile yazılır (Abramowitz, 1970). Burada ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ gösterimi; yazılan kuvvet serisinin değişkeninin z, payında $(\alpha)_n$ ve $(\beta)_n$ olmak üzere iki tane ve paydasında bir tane $(\gamma)_n$ Pochhammer sembolü bulunduğunu ifade etmektedir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu, α, β ve γ parametrelerinin bazı özel değerleri için elementer fonksiyonlar cinsinden yazılabilir. Örneğin:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z}log(1+z) &= {}_2F_1(1,1;2;-z) \\
(1-z)^{-\alpha} &= {}_2F_1(\alpha,1;1;z) \\
\frac{1}{z}arcsinz &= {}_2F_1\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2},z^2\Big) \\
\frac{1}{z}artanz &= {}_2F_1\Big(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},-z^2\Big)
\end{aligned}$$

Teorem 2.1. (Taşeli, 2003) : Hipergeometrik tipteki fonksiyonların bütün türevleri de yine hipergeometrik tipte fonksiyonlardır.

Kanıt: Hipergeometrik diferansiyel denklemin z bağımsız değişkenine göre türevi alındığında

$$\sigma^{'}(z)y^{''}+\sigma(z)y^{'''}+\tau^{'}(z)y^{'}+\tau(z)y^{''}+\lambda y'=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem y' nin türevlerinin mertebesine göre düzenlediğinde

$$\sigma(z)y^{'''}+(\sigma^{'}(z)+\tau(z))y^{''}+(\lambda+\tau^{'}(z))y'=0$$

biçiminde yazılır. Bu aşamada $y^{'}(z)=\upsilon_1(z)$ olarak tanımlandığında ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri de $y^{''}(z)=\upsilon_1^{'}(z)$ ve $y^{'''}(z)=\upsilon_1^{''}(z)$ biçiminde yazılır. Son yazılan denklemde $\mu_1=\lambda+\tau^{'}(z)$ ifadesinin sabit olduğu ve $\tau_1(z)=\sigma^{'}(z)+\tau(z)$ ifadesinin de derecesi en fazla 1 olan polinom olduğu bilinmektedir. Bu durumda,

$$\sigma(z)\upsilon_1^{''}(z)+\tau_1(z)\upsilon_1^{'}(z)+\mu_1\upsilon_1(z)=0$$

denkleminin de hipergeometrik tipte bir diferansiyel denklem olduğu görülmektedir. Yazılmış olan son denkleme tekrar türev alma işlemi uygulandığında elde edilecek denklem yine hipergeometrik tipte diferansiyel denklem olacaktır. Bu durumda türev alma işlemi devam ettirildiğinde tümevarımla, $y^n(z)=\upsilon_n(z)$ için hipergeometrik diferansiyel denklem tipinde

$$\sigma(z)\upsilon_n^{''}(z)+\tau_n(z)\upsilon_n^{'}(z)+\mu_n\upsilon_n(z)=0,\quad \upsilon_0\triangleq y \tag{12}$$

bir denkleme ulaşılır. Burada $n=1,2,3,\ldots$ için $\tau_n(z)$ ve $\mu_n(z)$ için

$$\begin{cases}\tau_n(z)=\sigma^{'}(z)+\tau_{n-1}(z)=n\sigma^{'}(z)+\tau(z) \quad ,\tau_0(z)\triangleq\tau(z) \\ \\ \mu_n(z)=\mu_{n-1}(z)+\tau_{n-1}^{'}(z)=\lambda+n\tau^{'}\frac{1}{2}n(n-1)\sigma_{n-1}^{''} \quad ,\mu_0(z)\triangleq\lambda\end{cases} \tag{13}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Teorem 2.2. (Taşeli, 2003) :

$$\sigma(z)y^{''} + \tau(z)y^{'} + \lambda y = 0$$

hipergeometrik difereansiyel denklemi

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau^{'}(z) - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^{''}(z) \tag{14}$$

özel değerleri için $y(z) \triangleq y_n(z)$ polinom çözümlerine sahiptir.
Kanıt: (12) denkleminde $\mu_n = 0$ kabul edilirse $\upsilon_n = C_0$ sabit çözümüne sahiptir.

$$\upsilon_n = y^n(z) = C_0$$

eşitliği art arda integrallenerek

$$\begin{aligned} y^{n-1}(z) &= C_0 z + C_1 \\ y^{n-2}(z) &= \frac{C_0}{2}z^2 + C_1 z + C_2 \\ y^{n-3}(z) &= \frac{C_0}{6}z^3 + \frac{C_1}{2}z^2 + C_2 z + C_3 \\ &\vdots \\ y &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}z + a_n \\ &= y^n(z) \end{aligned}$$

biçiminde n. dereceden polinom elde edilir. $\mu_n = 0$ kabulü

$$\lambda + n\tau^{'} + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^{''} = 0$$

denklemi ile

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau^{'}(z) - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^{''}(z)$$

olmasını gerektirmektedir. Bu da teoremin ispatını tamamlamaktadır.

Rodrigues formülü (Taşeli, 2003):
z bağımsız değişkenine bağlı $\rho(z)$ ve $\rho_n(z)$ analitik fonksiyonlar olsun. $\rho(z)$ fonksiyonu ile (11) denklemi $\rho_n(z)$ ile de (12) denklemi çarpılarak

$$\rho(z)\sigma(z)y^{''} + \rho(z)\tau(z)y^{'} + \lambda\rho(z)y = 0$$

$$\rho_n(z)\sigma(z)\upsilon_n^{''}(z) + \rho_n(z)\tau_n(z)\upsilon_n^{'}(z) + \rho_n(z)\mu_n\upsilon_n(z) = 0$$

olarak yeniden yazılabilmektedir. Bu denklemlerin self-adjoint formları

$$(\sigma(z)\rho(z)y^{'})^{'} + \lambda\rho(z)y = 0 \quad , \quad \lambda = \lambda_n \tag{15}$$

ve

$$(\sigma(z)\rho_n(z)\upsilon_n^{'}(z))^{'}+\mu_n\rho(z)\upsilon(z)=0 \tag{16}$$

biçiminde yazılabilir. Bu formda

$$\begin{aligned}(\sigma(z)(\rho(z))^{'} &= \tau(z)\rho(z)\\ (\sigma(z)\rho_n(z))^{'} &= \tau_n(z)\rho_n(z)\end{aligned}$$

eşitlikleri alınarak

$$\tau_n(z)=\frac{(\sigma(z)\rho_n(z))^{'}}{\rho_n}$$
$$\tau(z)=\frac{(\sigma(z)\rho(z))^{'}}{\rho}$$

şeklinde yazılır. Son yazılmış olan iki eşitlik ile $\tau_n=n\sigma^{'}(z)+\tau(z)$ ifadesi kullanılarak

$$\frac{(\sigma(z)\rho_n(z))^{'}}{\rho_n}=n\sigma^{'}(z)+\frac{(\sigma(z)\rho(z))^{'}}{\rho}$$

formunda yazılır. Burada eşitliğin her iki yanındaki türevleri alındığında

$$\frac{\sigma^{'}(z)\rho_n(z)+\sigma(z)\rho_n^{'}(z)}{\rho_n^{'}}=n\sigma^{'}(z)+\frac{\sigma^{'}(z)\rho(z)+\sigma(z)\rho^{'}(z)}{\rho}$$

elde edilir. Buradan işlemler devam ettirilerek düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\sigma(z)\frac{\rho_n^{'}(z)}{\rho_n} &= -\sigma^{'}(z)+n\sigma^{'}(z)+\sigma^{'}(z)+\sigma(z)\frac{\rho^{'}(z)}{\rho}\\ \frac{\rho_n^{'}(z)}{\rho_n} &= n\frac{\sigma^{'}(z)}{\sigma(z)}+\frac{\rho^{'}(z)}{\rho}\end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Denklemin çözümü, her iki tarafın integrali alınarak

$$ln(\rho_n^{'}(z))=n\,ln(\sigma(z))+ln(\rho(z))$$

eşitliğinden

$$\rho_n(z)=\sigma^n(z)\rho(z),\quad n=0,1,2,...\quad ve\quad \rho_0(z)=\rho(z) \tag{17}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sigma(z)\rho_n(z) &= \sigma^{(n+1)}(z)\rho(z)=\rho_{n+1}(z)\\ \upsilon_n^{'} &= \upsilon_{n+1}\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak self-adjoint formda yazılmış olan (16) denklemi

$$(\rho_{n+1}(z)\upsilon_{n+1}(z))^{'}+\mu_n\rho_n(z)\upsilon_n(z)=0$$

olarak düzenlenir. Bu denklemden

$$\rho_n(z)\upsilon_n(z)=-\frac{1}{\mu_n}(\rho_{n+1}(z)\upsilon_{n+1}(z))^{'}$$

elde edilir. Burada $m < n$ için ardışık olarak türevlendiğinde

$$\begin{aligned}\rho_m(z)\upsilon_m(z) &= -\frac{1}{\mu_m}(\rho_{m+1}(z)\upsilon_{m+1}(z))' = -\frac{1}{\mu_m}\Big(\frac{1}{\mu_{m+1}}(\rho_{m+2}(z)\upsilon_{m+2}(z))'\Big)\\ &= \frac{(-1)^2}{\mu_m\mu_{m+1}}(\rho_{m+2}(z)\upsilon_{m+2}(z))''\\ &= (-1)^{(n)}\frac{1}{\mu_m\mu_{m+1}...\mu_{m+n-1}}(\rho_{m+n}(z)\upsilon_{m+n}(z))^{(n)}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte n yerine $n-m$ alınırsa

$$\begin{aligned}\rho_m(z)\upsilon_m(z) &= (-1)^{(n-m)}\frac{1}{\mu_m\mu_{m+1}\cdots\mu_{n-1}}(\rho_n(z)\upsilon_n(z))^{(n-m)}\\ &= (-1)^{(n-m)}\frac{\mu_0\mu_1...\mu_{m-1}}{\mu_0\mu_1\cdots\mu_1\mu_{m+1}}(\rho_n(z)\upsilon_n(z))^{(n-m)}\\ &= \frac{(-1)^{(m)}\mu_0\mu_1...\mu_{m-1}}{(-1)^{(n)}\mu_0\mu_1\cdots\mu_1\mu_{m+1}\cdots\mu_{n-1}}(\rho_n(z)\upsilon_n(z))^{(n-m)}\end{aligned}$$

biçiminde yazılarak

$$\rho_m(z)\upsilon_m(z) = \frac{A_m}{A_n}\frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}}(\rho_n(z)\upsilon_n(z))$$

olarak düzenlenir. Burada

$$A_j(\lambda) = (-1)^j\Pi_{k=0}^{j-1}\mu_k(\lambda)\,, \quad A_0 \triangleq 1, \mu_0 = \lambda$$

olarak alınır. $\mu_n = 0$ ve $y_n^{(n)} = \upsilon_n$ ifadesi sabit olduğu için eğer $y(z) = y_n(z)$ derecesi n olan bir polinom ise bu durumda $\upsilon_m(z) = y_n^{(m)}(z)$ olur. Buradan

$$\upsilon_m(z) = y_n^{(m)}(z) = B_n\frac{A_{mn}}{\rho_m(z)}\frac{d^{n-m}\rho_n}{dz^{n-m}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte

$$A_{mn} = A_m(\lambda_n), \quad B_n = \frac{\upsilon_n}{A_n(\lambda_n)} = \frac{y_n^{(n)}(z)}{A_n} = sabit$$

alınmıştır. Özel olarak $m = 0$ olduğunda hipergeometrik fonksiyonların açık gösterimi

$$y_n(z) = B_n\frac{1}{\rho(z)}\frac{d^n}{dz^n}(\sigma^n(z)\rho(z)) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{18}$$

formunda yazılabilir. Yazılmış olan bu son ifade Rodrigues eşitliği olarak bilinmektedir.

Teorem 2.3. (Cauchy integral teoremi) (Taşeli, 2003):
f basit, bağlantılı $\mathbb{R}$ bölgesinde analitik fonksiyon ve $\mathcal{C}$, $\mathbb{R}$'de basit kapalı bir eğri olsun. Eğer z , $\mathcal{C}$ 'nin içinde bir nokta ise

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}ds\,, n \in \mathbb{N}$$

olarak yazılır. Bu integralde özel olarak $n = 0$ alınırsa ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{f(s)}{(s-z)}ds$$

ifadesi elde edilir. Buradan Rodrigues formülü ile elde edilen polinom çözümlerine Cauchy integral teoremi uygulandığında,

$$y_n(z) = \frac{C_n}{\rho(z)} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma^n(s)\rho(s)}{(s-z)^{n+1}} ds \quad , \quad C_n = \frac{n!}{2\pi i} B_n, \quad B_n \ sabit,$$

integraline ulaşılır. Bu integralde, Teorem 2.3' teki denklemi sağlaması koşuluyla n yerine ν yazıldığında

$$y(z) = y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds \tag{19}$$

integrali elde edilir.

Teorem 2.4 (Taşeli, 2003):
ν değişkeni

$$\lambda + \tau^{'}\nu + \frac{1}{2}\nu(\nu-1)\sigma^{''} = 0$$

denkleminin kökleri olsun. z bağımsız değişken olmak üzere

$$u(z) = \int_{\phi} \frac{\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+1}} ds \quad , \quad (\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s))$$

fonksiyonunu alındığında $u(z)$ fonksiyonunun z bağımsız değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} u^{'}(z) &= (\nu+1) \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} ds \\ u^{''}(z) &= (\nu+1)(\nu+2) \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma^\nu(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+3}} ds \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Ayrıca sınır noktaları s_1 ve s_2 olan öyle bir ϕ eğrisi seçilmelidir ki

$$\left. \frac{\sigma^{\nu+1}(s)\rho(s)}{(s-z)^{\nu+2}} \right|_{s_1}^{s_2} = 0 \tag{20}$$

eşitliğini sağlıyor olsun. Bu şartlar sağlanırsa (11) eşitliğinde verilen hipergeometrik diferansiyel denklem

$$y(z) = y_\nu(z) = \frac{C_\nu}{\rho(z)} u(z) \tag{21}$$

formunda çözüme sahip olur.
Kanıt: Hipergeometrik diferansiyel denklem (11) ile verilmişti.

$$\tau_\nu(s) = \tau(s) + \nu\sigma^{'}(s)$$

ve

$$[\sigma(s)\rho_\nu(s)]^{'} = \tau_\nu(s)\rho_\nu(s) \tag{22}$$

$$\rho_\nu(s) = \sigma^\nu(s)\rho(s) \tag{23}$$

olmak üzere self-adjoint formda

$$(\sigma\rho y^{'})^{'} + \lambda\rho y = 0$$

yazılabilir. $s \neq z$ olmak üzere $\frac{1}{(s-z)^{\nu+2}}$ çarpanı ile (23) eşitliğinin her iki tarafı çarpıldığında

$$\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)\frac{1}{(s-z)^{\nu+2}} = [\sigma(s)\rho_\nu(s)]^{'}\frac{1}{(s-z)^{\nu+2}}$$

formunda yazılır. Elde edilen eşitlikte, s değişkenine göre ϕ boyunca her iki tarafın integrali

$$\int_\phi \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}ds = \int_\phi [\sigma(s)\rho_\nu(s)]^{'}\frac{ds}{(s-z)^{\nu+2}}$$

olarak alınır. Yazılan son eşitliğin sağ tarafı kısmi integrasyon ile hesaplandığında

$$\int_\phi \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}ds = \frac{\tau_\nu(s)\rho_\nu(s)}{(s-z)^{\nu+2}}\Bigg|_{s_1}^{s_2}(\nu+2)\int_\phi \frac{[\sigma(s)\rho_\nu(s)]}{(s-z)^{\nu+3}}ds. \tag{24}$$

ifadesine ulaşılır. Teoremin hipotezinden, sınır terimleri için $\rho_\nu = \sigma^\nu\rho$ türevleri yok olur. Ayrıca $s = z$ noktasında Taylor serisi ile $\sigma(s)$ ve $\tau_\nu(s)$

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \sigma(z) + \sigma(z)^{'}(s-z) + \frac{\sigma^{''}(z)}{2}(s-z)^2 \\ \tau_\nu(s) &= \tau_\nu(z) + \tau_\nu^{'}(z)(s-z) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen $\sigma(s)$, $\tau_\nu(s)$ ve (24) eşitliği ile teoremde verilmiş olan u_z, $u^{'}(z)$, $u^{''}(z)$ eşitlikleri kullanılarak

$$\sigma(z)u^{''} + [2\sigma^{'}(z) - \tau(z)]u^{'} - (\nu+1)\Big[\frac{\nu-2}{2}\sigma^{''}(z) + \tau^{'}(z)\Big]u = 0$$

denklemi yazılır. $\sigma^{'} = \tau$ olduğundan

$$[(\sigma\rho)y]^{'} = (\sigma\rho)^{'}y + \sigma\rho y^{'}$$

özdeşliği kullanılarak

$$\sigma\rho y^{'} = (\sigma\rho y)^{'} - (\sigma\rho)^{'}y = [\sigma(\rho y)]^{'} - \sigma^{'}(\rho y) = [\sigma(\rho y)]^{'} - \tau(\rho y)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik, ρy yerine $c_\nu u$ yazılarak

$$\sigma\rho y^{'} = [\sigma c_\nu u]^{'} - \tau c_\nu = c_\nu[(\sigma u)^{'} - \tau u] \tag{25}$$

biçiminde düzenlenebilir. Elde edilen son eşitliğin her iki tarafının türevi alındığında

$$(\sigma\rho y^{'})^{'} = c_\nu[(\sigma u)^{''} - (\tau u)^{'}] = c_\nu\Big[(\nu+1)\Big(\frac{\nu-2}{2}\sigma^{''}(z) + \tau^{'}(z)\Big)u + [\sigma^{''}(z) - \tau^{'}(z)]u\Big]$$

eşitliği yazılır. Gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} (\sigma\rho y^{'})^{'} &= c_\nu\Big[\frac{1}{2}\nu(\nu-1)\sigma^{''} + \nu\tau^{'}\Big]u \\ &= -\lambda c_\nu u = -\lambda\rho y \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yani hipergeometrik diferansiyel denklem self-adjoint formda

$$(\sigma\rho y^{'})^{'} + \lambda\rho y = 0$$

biçiminde yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.3. Hipergeometrik Diferansiyel Denklem Çeşitleri

Genelleştirilmiş hipergeometrik diferansiyel denklemin özel bir hali olarak bilinen hipergeometrik diferansiyel denklemde $\tau(z)$' in en fazla birinci dereceden polinom ve $\sigma(z)$' in ise en fazla ikinci dereceden polinom oldukları biliniyor. $\sigma(z)$ polinomunun derecesine göre hipergeometrik diferansiyel denklemin üç farklı durumu oluşmaktadır.

2.3.1. Gauss hipergeometrik diferansiyel denklem

a ve b birbirinden farklı sabitler olmak üzere $\sigma(z)$, ikinci dereceden polinom olarak $\sigma(z) = (z-a)(b-z)$ alınırsa s değişkenine bağlı

$$z = a + (b-a)s$$

dönüşümü ile α, β, γ gerçel veya kompleks sabitler olmak üzere (11) denklemi

$$s(1-s)y^{''} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)s]y^{'} - \alpha\beta y = 0 \tag{26}$$

formunda elde edilir. Gauss hipergeometrik diferansiyel denklem (1813) olarak bilinen bu denklemin 0, 1 ve ∞ olmak üzere düzgün üç tekil noktası vardır. Gauss hipergeometrik diferansiyel denkleminin her bir tekil noktası için doğrusal bağımsız iki çözümü vardır. Bu durumda düzgün üç tekil nokta için bulunacak her bir özel çözüm aşağıdaki gibi yazılır:

1. $z = 0$ noktası etrafında, eğer γ tam sayı değilse iki bağımsız çözümü vardır:
   - $${}_2F_1(\alpha;\beta;\gamma;z)$$
   - $$z(1-\gamma)_2F_1(1+\alpha-\gamma;1+\beta-\gamma;2-\gamma;z)$$
2. $z = 1$ civarında, eğer $(\gamma-\alpha-\beta)$ bir tam sayı değilse iki bağımsız çözümü vardır:
   - $${}_2F_1(\alpha;\beta;1+\alpha+\beta-\gamma;1-z)$$
   - $$z(c-\alpha-\beta)_2F_1(\gamma-\alpha;\gamma-\beta;1+\gamma-\alpha-\beta;1-z)$$

3. $z=\infty$ civarında, eğer $(\alpha-\beta)$ bir tam sayı değilse iki bağımsız çözümü vardır:

- $$z^{-\alpha}{}_2F_1(\alpha;1+\alpha-\gamma;1+\alpha-\beta-\gamma;z^{-1})$$
- $$z^{-\beta}{}_2F_1(\beta;1+\beta-\gamma;1+\beta-\alpha;z^{-1})$$

2.3.2. Hermite hipergeometrik diferansiyel denklem

$\sigma(z)$ polinomu, z değişkeninden bağımsız bir sabit olarak $\sigma(z)=1$ alınsın. a ve b birbirinden farklı sabitler olmak üzere (11) denkleminde $z=a+bs$ dönüşümü yapılarak ν gerçel veya karmaşık sabiti ile

$$y''-2sy'+2\nu y=0$$

Hermite denklemi elde edilir (Taşeli, 2003).

2.3.3.Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem

$\sigma(z)$ polinomu, z değişkenine bağlı birinci dereceden polinom olarak $\sigma(z)=(z-a)$ biçiminde alınsın. a ve b birbirinden farklı sabitler olmak üzere (11) denkleminde $z=a+bs$ dönüşümü uygulanarak

$$sy''+[\gamma-s]y'+\alpha y=0$$

konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem elde edilir (Taşeli, 2003).

3. Bölüm

KONFLUENT HİPERGEOMETRİK DİFERANSİYEL DENKLEM

Bu bölümde, hipergeometrik diferansiyel denklem çeşitlerinden konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem ve bu denklemin çözümlerinin elde edilmesi incelenecektir. Konfluent hipergeometrik denklemin oluşturulması ve çözümlerinin elde edilmesi aşamalarında (Taşeli, 2003), (Altundağ, 2020) ve (Polat, 2004) kaynaklarından faydalanılmıştır.

3.1. Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklem

(11) eşitliği ile verilen hipergeometrik diferansiyel denklemde en fazla ikinci derece olan $\sigma(z)$ polinomu $\sigma(z) = (z - a)$ olarak alınıp $a \neq b$ olmak üzere $(z = a + bs)$ dönüşümü uygulansın. Bu dönüşümü yapmak için

$$s = \frac{1}{b}(z - a)$$

yazılır. Dikkat edildiğinde y bağımlı değişkenin z değişkenine ve z' nin de s değişkenine bağlı olduğu görülmektedir. O halde y değişkeninin z değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri zincir kuralı yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dz} \\ \frac{d^2y}{dz_2} &= \frac{d^2y}{ds^2}\Big(\frac{ds}{dz}\Big)^2 + \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dz^2} \end{aligned}$$

uygunlanırsa

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{1}{b}\dfrac{dy}{ds} \\ \\ \dfrac{d^2y}{dz^2} = \dfrac{1}{b^2}\dfrac{d^2y}{ds^2} \end{cases}$$

olarak elde edilir. Derecesi en fazla bir olan $\tau(z)$ polinomu $z = a$ noktasında birinci dereceden Taylor serisine açılırsa

$$\tau(z) = \tau(a) + \tau'(a)(z - a)$$

elde edilir. Bu seri açılımı ve $\sigma(z) = (z - a)$ polinomu hipergeometrik diferansiyel denklemde yerlerine yazılarak

$$(z - a)\frac{d^2y}{dz^2} + [\tau(a) + \tau'(a)(z - a)]\frac{dy}{dz} + \lambda y = 0$$

elde edilir. Önceden elde edilen birinci ve ikinci mertebeden türevler ile $(z = a + bs)$ dönüşümü yerlerine yazıldığında denklem,

$$(a + bs - a)\frac{1}{b^2}\frac{d^2y}{ds^2} + [\tau(a) + \tau'(a)(a + bs - a)]\frac{1}{b}\frac{dy}{ds} + \lambda y = 0$$

biçiminde olur. Elde edilen son denklem y değişkeninin türev mertebesine göre düzenlendiğinde

$$(bs)\frac{1}{b^2}\frac{d^2y}{ds^2} + [\tau(a) + \tau'(a)(bs)]\frac{1}{b}\frac{dy}{ds} + \lambda y = 0$$

ifadesi oluşur. Son denklem b sabiti ile çarpıldığında

$$sy^{''} + [\tau(a) + \tau^{'}(a)bs]y^{'} + \lambda by = 0$$

olarak yazılır. Bu denklem $\tau^{'} \neq 0$ ise ve $\tau^{'}b = -1$ alındığında $b = -\frac{1}{\tau'}$ olarak yeniden düzenlenerek

$$sy^{''} + [\tau(a) - s]y^{'} - \frac{\lambda}{\tau'}y = 0$$

biçiminde yazılır. Son olarak $\tau(\alpha) = \gamma$, $\alpha = \frac{\lambda}{\tau'}$ alındığında

$$sy^{''} + [\gamma - s]y^{'} - \alpha y = 0 \tag{27}$$

konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem elde edilir.

3.2. Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklemin Çözümü

Genelleştirilmiş hipergeometrik diferansiyel denklem için uygulanmış olan $u = \Phi(z)y$ dönüşümü, (11) ile verilmiş olan hipergeometrik diferansiyel denklem için de geçerlidir. Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem, z bağımsız değişken olmak üzere

$$zu^{''} + (\gamma - z)u^{'} - \alpha u = 0 \tag{28}$$

biçiminde yazılır. Bu denklem ile genelleştirmiş hipergeometrik diferansiyel denklem karşılaştırıldığında

$$\sigma(z) = z\ ,\ \sigma^{'}(z) = 1\ ,\ \widetilde{\tau}(z) = \gamma - z\ ,\ \widetilde{\sigma}(z) = -\alpha z \tag{29}$$

olduğu görülür. Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemde $u = \Phi(z)y$ dönüşümünü uygulamak için birinci ve ikinci mertebeden türevleri

$$\begin{cases} u^{'} = \Phi^{'}(z)y + \Phi(z)y^{'} \\ u^{''} = \Phi^{''}(z)y + 2\Phi^{'}(z)y' + \Phi(z)y^{''} \end{cases}$$

olarak yazılır. Bu türevler (28) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$z[\Phi^{''}(z)y + 2\Phi^{'}(z)y' + \Phi(z)y^{''}] + (\gamma - z)[\Phi^{'}(z)y + \Phi(z)y^{'}] - \alpha\Phi(z)y = 0$$

olur. Elde edilen denklem y bağımlı değişkeninin türevlerine göre düzenlenerek

$$z\Phi(z)y^{''} + [2z\Phi^{'}(z) + (\gamma - z)\Phi(z)]y' + [z\Phi^{''}(z) + (\gamma - z)\Phi^{'}(z) - \alpha\Phi(z)]y = 0$$

şeklinde yazılır. Son denklem, $z\Phi(z) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{z\Phi(z)}$ ile çarpılarak düzenlendiğinde

$$y^{''} + \left[2\frac{\Phi^{'}(z)}{\Phi(z)} + \frac{(\gamma - z)}{z}\right]y^{'} + \left[\frac{\Phi^{''}(z)}{\Phi(z)} + \frac{(\gamma - z)}{z}\frac{\Phi^{'}(z)}{z\Phi(z)} - \frac{\alpha}{z}\right]y = 0 \tag{30}$$

denklemi oluşur. Hipergeometrik diferansiyel denklemde, derecesi en fazla bir olan ve birinci mertebeden türevin katsayısı olarak yazılan $\tau(z)$ polinomunu elde etmek için (30) denkleminde

$$2\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\tau(z) - (\gamma - z)}{z}$$

olarak tanımlansın. Bu eşitlik

$$\Pi(z) = \frac{1}{2}[\tau(z) - (\gamma - z)]$$

olmak üzere yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{2}[\tau(z) - (\gamma - z)] = \frac{\Pi(z)}{z}$$

elde edilir. $\tau(z)$ polinomu en fazla birinci dereceden olarak tanımlanmıştı, γ sabit ve z de birinci dereceden polinom olduğu için $\Pi(z)$ polinomunun da en fazla birinci dereceden olduğu görülür. $\frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$ olarak (30) denkleminde bulunan terim için

$$\frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} = \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right]' + \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right]^2$$

eşitliğinin sağlandığı

$$\left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right]' + \left[\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right]^2 = \left[\frac{\Phi''(z)\Phi(z) - \Phi'(z)\Phi'(z)}{(\Phi(z))^2}\right] + \left[\frac{(\Phi'(z))^2}{(\Phi(z))^2}\right]$$

yardımıyla görülür. $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ için bulunan eşitlik kullanılarak

$$\frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)} = \left(\frac{\Pi(z)}{z}\right)' + \left(\frac{\Pi(z)}{z}\right)^2$$

olarak yazılır. $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ ve $\frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$ terimleri için elde edilen eşitlikler (30) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$y'' + \left[\frac{2\Pi(z)}{z} + \frac{(\gamma - z)}{z}\right]y' + \left[(\frac{\Pi(z)}{z})' + (\frac{\Pi(z)}{z})^2 + \frac{(\gamma - z)}{z}\frac{\Pi(z)}{z} - \frac{\alpha}{z}\right]y = 0$$

elde edilir. Son denklem, üçüncü terimdeki katsayıda bulunan türev işlemi uygulanılarak

$$y'' + \left[\frac{2\Pi(z)}{z} + \frac{(\gamma - z)}{z}\right]y' + \left[(\frac{\Pi'(z)z - \Pi(z)}{z^2})' + (\frac{\Pi(z)}{z})^2 + \frac{(\gamma - z)}{z}\frac{\Pi(z)}{z} - \frac{\alpha}{z}\right]y = 0$$

şeklinde yazılıp düzenlendiğinde

$$y'' + \left[\frac{2\Pi(z) + (\gamma - z)}{z} + \right]y' + \left[\frac{\Pi^2(z) + \Pi(z)(\gamma - z - 1) + z(\Pi'(z) - \alpha)}{z^2}\right]y = 0$$

biçiminde elde edilir. Bu denklem ile hipergeometrik diferansiyel denklem karşılaştırılarak $\tau(z)$ ve $\tilde{\tilde{\sigma}}(z)$ için

$$\begin{cases}\tau(z) = 2\Pi(z) + (\gamma - z)\\ \tilde{\tilde{\sigma}}(z) = \Pi^2(z) + (\gamma - z - 1)\Pi(z) + z(\Pi'(z) - \alpha)\end{cases} \tag{31}$$

eşitlikleri yazılabilir. Daha basit bir yazılım elde etmek için $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(z)$ polinomu $\sigma(z) = z$ polinomuna bölünebilecek şekilde λ sabit olmak üzere $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(z) = \lambda z$ biçiminde seçilsin. Bu seçim ile (31) denklemi birlikte kullanıldığında

$$\Pi^2(z) + (\gamma - z - 1)\Pi(z) + z(\Pi^{'}(z) - \alpha) = \lambda z$$

eşitliği yazılarak düzenlenirse

$$\Pi^2(z) + (\gamma - z - 1)\Pi(z) + z(\Pi^{'}(z) - \alpha - \lambda) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $\Pi(z)$' e göre ikinci dereceden denklemdir. Oluşturulan denklemin çözümleri, ikinci dereceden denklemin bilinen çözüm yöntemleri ile

$$\Pi(z) = \frac{-(\gamma - z - 1) \mp \sqrt{(\gamma - z - 1)^2 - 4(\Pi^{'}(z) - \alpha - \lambda)z}}{2}$$

olarak yazılabilir. Yazılan çözüm,

$$\Pi(z) = \frac{-(\gamma - z - 1)}{2} \mp \sqrt{\frac{(\gamma - z - 1)^2 - 4(\Pi^{'}(z) - \alpha - \lambda)z}{4}}$$

formunda düzenlenir. Burada, $k = \Pi^{'}(z) - \alpha - \lambda$ olarak tanımlanıp yeniden düzenlendiğinde

$$\Pi(z) = -\frac{(\gamma - z - 1)}{2} \mp \sqrt{\Big(\frac{\gamma - z - 1}{2}\Big)^2 - kz} \tag{32}$$

elde edilir. $\alpha,\ \lambda,\ \Pi^{'}(z)$ sabit olduklarından k da sabittir. $\Pi(z)$ lineer bir ifade olduğu için (32) ile verilen ifadedeki karekökün içinin bir tamkare olması gerekmektedir. Bu durum karekök içindeki ifadenin diskriminantının sıfır olmasını gerektirir. Aksi halde $\Pi(z)$' in lineer olmayacağı kolaylıkla görülür. O halde, karekökün içine $P_2(z)$ denilirse

$$P_2(z) = \Big(\frac{\gamma - z - 1}{2}\Big)^2 - kz = \frac{1}{4}[(\gamma - z - 1)^2 - 4kz] = \frac{1}{4}[z^2 + 2(1 - \gamma - 2k)z + (1 - \gamma)^2]$$

elde edilir. k sabitinin eşitini bulabilmek $P_2(z)$' in diskriminantı sıfıra eşitlendiğinde,

$$[2(1 - \gamma - 2k)]^2 - 4(1 - \gamma)^2 = 0$$

elde edilir. İşlemler devam ettirilerek

$$4k[k - (1 - \gamma)] = 0 \tag{33}$$

denkleminden $k_1 = 1 - \gamma$ ve $k_2 = 0$ olarak elde edilir. Buradan $k_1 = 1 - \gamma$ için $P_2(z)$ çözümü

$$P_2(z) = \frac{1}{4}[z^2 + 2(1 - \gamma - 2(1 - \gamma))z + (1 - \gamma)^2] = \frac{1}{4}[z^2 + (1 - \gamma)]^2 \tag{34}$$

ve $k_2 = 0$ için $P_2(z)$ çözümü

$$P_2(z) = \frac{1}{4}[z^2 + 2(1 - \gamma)z + (1 - \gamma)^2] = \frac{1}{4}[z^2 + (1 - \gamma)]^2 \tag{35}$$

olarak elde edilir. Bu iki çözümün aynı olduğu görülür. $k_1 = 1 - \gamma$ değeri için olabilecek $\Pi(z)$ çözümleri (32) denkleminden

$$\Pi(z) = \frac{1}{2}\{z + (1-\gamma) \mp [z - (1-\gamma)]\}$$

lineer olarak hesaplanır. Elde edilen $\Pi(z)$ lineer ifadesi ve

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{\Pi(z)}{z}$$

diferansiyel denkleminin yardımıyla $\Phi(z)$ fonksiyonları hesaplanır. Burada $\mp$ durumlarına göre farklı iki $\Pi(z)$ değeri ile hesaplanan $\Phi(z)$ fonksiyonlarının elde edilmesi incelendiğinde:

- 1. Durum

  $$\Pi(z) = \frac{1}{2}\{z + (1-\gamma) - [z - (1-\gamma)]\} = 1 - \gamma$$

  olup;

  $$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{1-\gamma}{z}$$

  diferansiyel denklemi çözülürse c sabit olmak üzere

  $$\Phi(z) = c.z^{1-\gamma}$$

  fonksiyonu elde edilir.

- 2. Durum

  $$\Pi(z) = \frac{1}{2}\{z + (1-\gamma) + [z - (1-\gamma)]\} = z$$

  olup;

  $$\Pi(z) = z \quad , \quad \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{z}{z}$$

  diferansiyel denklemi çözülürse c sabit olmak üzere

  $$\Phi(z) = c.e^z$$

  fonksiyonu elde edilir. Kolaylık sağlaması için çözümlerdeki c sabitinin değeri bir alınarak devam edilecektir.

Birinci durumdan elde edilen $\Pi(z) = (1-\gamma)$ çözümü (31) denklemi ile verilen $\tau(z)$ ve $\widetilde{\widetilde{\sigma}}(z)$ polinomlarında yazılarak (29) denkleminde tanımlanan $\sigma(z) = z$ polinomuna bölünürse

$$\begin{cases} \tau(z) = 2(1-\gamma) + \gamma - z = 2 - \gamma - z \\ \dfrac{\widetilde{\sigma}(z)}{\sigma(z)} = \dfrac{1}{z}[(1-\gamma)^2 + (\gamma - z - 1)(1-\gamma) + (-\alpha z)] = \gamma - \alpha - 1 \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ve $\sigma(z) = z$ polinomu (11) denkleminde yerlerine yazılarak

$$zy'' + [(2-\gamma) - z)]y' - (\alpha - \gamma + 1)y = 0 \tag{36}$$

denklemi oluşturulur. Burada $\gamma^{'}$ ve $\alpha^{'}$ sabitleri

$$\gamma^{'} = 2 - \gamma$$

$$\alpha^{'} = \alpha - \gamma + 1$$

olarak tanımlansın. Bu sabitler (36) denkleminde yazılarak

$$zy^{''} + [\gamma^{'} - z)]y^{'} - \alpha^{'}y = 0 \tag{37}$$

kanonik formda yazılmış olur. İkinci durumda elde edilen $\Pi(z) = z$ çözümü (31) eşitliklerinde kullanılarak aynı adımlar uygulandığında

$$\begin{cases} \tau(z) = 2z + \gamma - z = \gamma + z \\ \dfrac{\widetilde{\sigma}(z)}{\sigma(z)} = \dfrac{1}{z}[z^2 + (\gamma - z - 1)z + (-\alpha z) + z] = \gamma - \alpha \end{cases} \tag{38}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ve $\sigma(z) = z$ polinomu (11) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$zy^{''} + (\gamma + z)y^{'} + (\gamma - \alpha)y = 0 \tag{39}$$

denklemi elde edilir. Fakat bu denklem, (28) denklemi ile karşılaştırıldığında konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem olmadığı görülür. Bu aşamada $t = -z$ dönüşümü uygulansın. Burada y bağımlı değişkenin t değişkenine ve t' nin de z değişkenine bağlı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla dönüşüm için gerekli türevler

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dz} = -\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

olarak elde edilir. Bu türevler (39) denkleminde yerlerine yazılarak

$$-t\frac{d^2y}{dt^2} + (\gamma + (-t))\Big(-\frac{dy}{dt}\Big) + (\gamma - \alpha)y = 0$$

elde edilir. Bu denklem -1 ile çarpılarak düzenlenirse

$$ty^{''} + (\gamma - t)y^{'} - (\gamma - \alpha)y = 0$$

elde edilir. $\gamma = \gamma^{''}$ ve $\gamma - \alpha = \alpha^{''}$ sabitleri tanımlanarak son denklemde yazılırsa

$$ty^{''} + (\gamma^{''} - t)y^{'} - \alpha^{''}y = 0 \tag{40}$$

kanonik formu elde edilir. Görüldüğü gibi $u_1(z) = g(\alpha, \gamma, z)$, konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin bir çözümü ise (37) ve (40) denklemlerinden de elde edilecek birer çözümle;

$$\begin{cases} u_1(z) = g(\alpha, \gamma, z) \\ u_2(z) = z^{1-\gamma}g(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \\ u_3(z) = e^z g(\gamma - \alpha, \gamma, -z) \end{cases} \tag{41}$$

konfluent hipergeometrik denklemin çözümleri olarak bulunur. $u_2(z)$ ve $u_3(z)$ çözümlerinde çarpan olarak yazılan z^{1-z} ve e^z ifadelerinin $u = \Phi(z)y$ dönüşümden geldiği açıkça görülmektedir. $u_1(z)$ ve $u_2(z)$ çözümleri konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümüdür. A_1 ve B_1 sabitleri ile genel çözüm,

$$u = A_1 g(\alpha, \gamma, z) + B_1 z^{1-\gamma} g(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \tag{42}$$

olarak yazılır. Daha önceden elde edilen $\Phi(z)$ çözümlerindeki c sabitinin burada A_1 ve B_1 sabitlerine dahil olduğu görülür. $u_3(z)$ çözümü için konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin integral gösterimleri bölümünde detaylı açıklama yapılacaktır. k_1 ve k_2 değerleri için hesaplanmış olan P_2 çözümleri eşit olduğu için k_2 içinde aynı çözümler bulunacaktır.

3.3. Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklemin Çözümünün İntegral Gösterimleri

Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin u_1 ve u_2 çözümlerinin integral gösterimleri bu bölümde açıklanacaktır. (28) ile verilen konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemde $\sigma(z) = z$, $\tau(z) = \gamma - z$, $\lambda = -\alpha$ olduğu görülmektedir. $\sigma(z)$, $\tau(z)$ polinomları kullanılarak

$$(\sigma(z)\rho(z))' = \tau(z)\rho(z)$$

eşitliği ile $\rho(z)$ fonksiyonunun hesaplanması yapılmaktadır. Denklemde türev uygulandıktan sonra $\sigma(z) = z$ ve $\tau(z) = \gamma - z$ yerlerine yazılarak düzenlendiğinde

$$\frac{\rho'(z)}{\rho(z)} = \frac{\gamma - z}{z} - \frac{1}{z}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Oluşturulan diferansiyel denklemin her iki tarafı $\mathcal{C}$ eğrisi boyunca integre edilerek,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} dz = \int_{\mathcal{C}} \Big(\frac{\gamma - z}{z} - \frac{1}{z} \Big) dz$$

denklemi elde edilir. İntegral içinde yapılan düzenleme ile

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} dz = \int_{\mathcal{C}} \Big(\frac{\gamma - 1}{z} - \frac{z}{z} \Big) dz$$

oluşan denklemde işlemler sürdürüldüğünde

$$ln(\rho(z)) = ln(z)^{(\gamma-1)} - ln(e)^z$$

çözümü yapılarak $\rho(z) = e^{-z} z^{\gamma-1}$ olarak elde edilir. Bulunan $\rho(z)$ ifadesi (20) ile verilen koşulda yazıldığında

$$\frac{s^{-\alpha+1} e^{-s} s^{\gamma-1}}{(s-z)^{-\alpha+2}} \Bigg|_{s_1}^{s_2} = 0$$

işlem sürdürülerek

$$s^{\gamma-\alpha}(s-z)^{\alpha-2}e^{-s}\Big|_{s_1}^{s_2}=0$$

eşitliği elde edilir. $\mathcal{C}$ eğrileri s_1, s_2 noktalarını birleştiren doğrular olarak alınabilir.

- 1.durum

$$s_1=0,\ s_2=z;\quad s=zt,\quad 0\leq t\leq 1,\quad Re(\gamma)>Re(\alpha)>2$$

- 2.durum

$$s_1=z,\ s_2=\infty;\quad s=z(1-t),\quad 0\leq t\leq \infty,\quad Re(\alpha)>2$$

Burada ν, Teorem.2.4' e göre

$$\lambda+\tau^{'}\nu+\frac{1}{2}\nu(\nu-1)\sigma^{''}=0$$

denkleminin kökleridir. Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemde

$$\tau(z)=\gamma-z,\ \tau^{'}(z)=-1$$

ve

$$\sigma(z)=z,\ \sigma^{''}(z)=0,\ \lambda=-\alpha$$

olduğundan denklemde yerlerine yazıldığında,

$$-\alpha-1.\nu+\frac{1}{2}\nu(\nu-1).0=0$$

denkleminden

$$\nu=-\alpha$$

olarak elde edilir. $s=zt$ eğrisi ile verilen birinci durumda $u_1(z)=g(\alpha,\gamma,z)$ çözümünün integral gösterimi (19) denkleminden;

$$\begin{aligned}
u_1(z) &= g(\alpha,\gamma,z)=\frac{C_\nu}{e^{-z}z^{\gamma-1}}\int_{\mathcal{C}}\frac{s^{-\alpha}e^{-s}s^{\gamma-1}}{(s-z)^{-\alpha+1}}ds=C_\nu e^z z^{1-\gamma}\int_{\mathcal{C}}\frac{(zt)^{-\alpha}e^{-zt}(zt)^{\gamma-1}}{(zt-z)^{-\alpha+1}}zdt\\
&= C_\nu e^z z^{1-\gamma}\int_{\mathcal{C}}z^{-\alpha+\gamma-1+\alpha-1+1}(1-t)^{\alpha-1}t^{-\alpha+\gamma-1}e^{-zt}dt\\
&= C(\alpha,\gamma)e^z\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\gamma-\alpha-1}e^{-zt}dt \qquad (43)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $C(\alpha,\gamma)$ normalizasyon sabiti olup $u_1(0)=1$ eşitliği ile

$$C(\alpha,\gamma)=\frac{1}{\beta(\alpha,\gamma-\alpha)}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

olarak seçilmiştir. Bu seçim çözümü normalize etmeye yarayacaktır.

$$u_1(z)=g(\alpha,\gamma,0)=C(\alpha,\gamma)\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}t^{\gamma-\alpha-1}dt=1$$

β fonksiyonun tanımından

$$\beta(\alpha, \gamma - \alpha) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\gamma-\alpha-1} dt$$

yazılabilindiği görülmektedir. $u_1(z)$ için elde edilmiş olan çözümden faydalanılarak (41) denklemindeki $u_2(z)$ çözümünün integral gösterimi yazılabilir. Bunun için $\alpha = \alpha - \gamma + 1, \gamma = 2 - \gamma$ yazılarak $u_2(z)$ çözümü

$$\begin{aligned} u_2(z) &= z^{1-\gamma} g(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) = C(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} e^z \int_0^1 (1-t)^{\alpha-\gamma+1-1} t^{2-\gamma-\alpha+\gamma-1-1} e^{-zt} dt \\ &= C(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} e^z \int_0^1 (1-t)^{\alpha-\gamma} t^{-\alpha} e^{-zt} dt \,, \quad 1 - \gamma \neq 0 \end{aligned} \tag{44}$$

biçiminde elde edilir. Bulunan $u_1(z)$ ve $u_2(z)$ çözümleri konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümüdür. Yine (41) denklemindeki $u_3(z)$ çözümü $u_1(z)$ çözümünün integral çözümünden faydalanılarak hesaplanabilir. Bunun için de $\alpha = \gamma - \alpha$, $z = -z$ olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} u_3(z) &= g(\gamma - \alpha, \gamma, -z) = C(\alpha, \gamma) e^z e^{-z} \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-1} t^{\gamma-\gamma+\alpha-1} e^{zt} dt \\ &= C(\alpha, \gamma) \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{zt} dt \end{aligned} \tag{45}$$

integrali elde edilir. $k = 1 - \gamma$ ve $k_2 = 0$ için edilen P_2 çözümlerinin aynı olduğu önceki bölümde açıklanmıştır. Buradan $k_2 = 0$ değeri ile elde edilecek çözümlerin, $k = 1 - \gamma$ için bulunan $u_1(z)$, $u_2(z)$ ve $u_3(z)$ çözümleriyle aynı olacağı görülür. $u_3(z)$ çözümü için

$$u_3(z) = A u_1(z) + B u_2(z) \tag{46}$$

eşitliği incelendiğinde $u_2(z)$ olarak elde edilen (44) çözümünde $1 - \gamma < 0$ için $z \to 0$ yaklaştığında $z^{1-\gamma} \to \infty$ olduğu görülür. u_2 çözümünde $z^{1-\gamma}$ çarpan olarak bulunduğundan $u_2 \to \infty$ olur. O halde (46) eşitliğinde $u_3(z) \to \infty$ olduğu görülür. Fakat (45) eşitliğinde $z \to 0$ için incelendiğinde integral ifadesi Beta fonksiyonu yardımıyla hesaplanabilir. Bu durumda $u_3(z) \to \infty$ olmadığı görülür. Bu şartlarda (46) eşitliğinde $B = 0$ olması gerektiği görülür. O halde

$$u_3(z) = A u_1(z)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre $z = 0$ değeri için Gama ve Beta fonksiyonları yardımıyla

$$u_3(0) = A u_1(0)$$

eşitliği hesaplandığında $A = 1$ olarak elde edilir. Buna göre $u_3(z) = u_1(z)$ olduğu görülür.

$$g(\alpha, \gamma, z) = e^z g(\gamma - \alpha, \gamma, -z)$$

ile gösterilen fonskiyonel bağıntı KUMMER DÖNÜŞÜMÜ (Kummer, 1837) olarak adlandırılır. $u_1(z)$ çözümünün verildiği (43) eşitliği ve KUMMER dönüşümü kullanılarak

$$g(\alpha,\gamma,z) = C(\alpha,\gamma)\int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\gamma-\alpha-1}e^{-zt}dt$$

eşitliği yazılır.

$s = z(1-t)$ ile 2. durumda verilen eğri $Re(\alpha) > 0, (\arg(z) \leqslant \pi)$ olmak üzere,

$$g(\alpha,\gamma,z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty (1+t)^{\gamma-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{-zt}dt$$

çözümünü verir. Bu çözüm 2.tip konfluent hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır. Birinci durum için uygulanan adımlar, ikinci durumda verilen eğri ile uygulandığında bulunan çözümün aslında u_1 ve u_2 çözümlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabildiği görülür (Tricomi, 1947).

3.4. Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklemin Kuvvet Seri Çözümleri

Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olan

$$g(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{zt}dt$$

fonksiyonunun integral gösterimi önceki bölümde açıklanmıştır. Hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümü olan hipergeometrik fonksiyon seri açılım olarak yazılabilmektedir. Bu bölümde hipergeometrik fonksiyonun Pochhammer sembolü kullanılarak e^{zt} fonksiyonunun

$$e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}$$

seri açılımı olarak yazıldığı anlatılacaktır. Bu seri $\mid z \mid < \infty$ için, yani bütün karmaşık (kompleks) düzlemde yakınsaktır. Oluşturulan seri açılımı $g(\alpha,\gamma,z)$ integral çözümünde yerine yazılırsa

$$g(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-1}t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(zt)^n}{n!}dt$$

elde edilir. Bu aşamada integral ile serinin yerleri değiştirildiğinde,

$$g(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-1}t^{n+\alpha-1}dt$$

elde edilen integral ifadesinde Beta fonksiyonunun tanımından

$$\beta(\alpha+n,\gamma-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}$$

olduğu görülür. Buna göre $\beta(\alpha+n,\gamma-\alpha)$ fonksiyonunun eşitini $g(\alpha,\gamma,z)$ için yazılmış olan son halinde yazılırsa

$$g(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}$$

eşitliği oluşur. Toplam sembolü içinde düzenlendiğinde

$$g(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}}{\dfrac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}}$$

biçiminde yazılır. Pochhammer sembolünün tanımı kullanılarak $(\alpha)_n$ ve $(\gamma)_n$ sabitleri

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \quad , \quad (\gamma)_n = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}$$

formunda yazılır. $g(\alpha, \gamma, z)$ için yazılan son eşitlikte $(\alpha)_n$ ve $(\gamma)_n$ sabitlerinin değerleri yazıldığında

$$g(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

elde edilir. Son eşitlik ile verilmiş olan fonksiyon; değişken olarak z, kesirli ifadesinin payında α' nın, paydasında γ' nın olmak üzere birer tane Pochhammer sembolü bulunuyor. $g(\alpha, \gamma, z)$ fonksiyonu,

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$$

seri gösterimi olarak da yazılabilir.

Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem; sonlu bir tekil noktasının sonsuzdaki tekil noktası ile limit işlemi uygulanarak birleştirilmesiyle (26) eşitliğindeki Gauss hipergeometrik diferansiyel denkleminden elde edilebilir. $s = \dfrac{z}{\beta}$ dönüşümü Gauss hipergeometrik diferansiyel denkleminde uygulanarak

$$z\Big(1 - \frac{z}{\beta}\Big)\frac{d^2y}{dz^2} + \Big[\gamma - \Big(1 + \frac{1+\alpha}{\beta}\Big)z\Big]\frac{dy}{dz} - \alpha y = 0 \tag{47}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin de $z = 0$, $z = \beta$ ve $z = \infty$ olan üç tane düzgün tekil noktası vardır. Ayrıca denklemin bir çözümü

$${}_2F_1\Big(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}\Big)$$

biçiminde yazılan fonksiyondur. (47) ile verilen denklemde $(\beta \to \infty)$ uygulandığında

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (\gamma - z)\frac{dy}{dz} - \alpha y = 0$$

denklemi elde edilir. Denklemin çözümü için ${}_2F_1\Big(\alpha, \beta; \gamma; \dfrac{z}{\beta}\Big)$ fonksiyonunda $(\beta \to \infty)$ uygulandığında Pochhammer sembolü ile

$$\lim_{\beta \to \infty} {}_2F_1\Big(\alpha, \beta; \gamma; \frac{\kappa}{\beta}\Big) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = M(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$$

biçiminde elde edilen konfluent hipergeometrik fonksiyon, mutlak yakınsak sonsuz kuvvet seri ile yazılabilir. $M(\alpha; \gamma; z)$, Kummer tarafından 1836' da sunulan bir gösterimdir. Konfluent hipergeometrik fonksiyon (Kummer fonksiyonu), hipergeometrik fonksiyonun bir sınırı olarak da

söylenebilir. $\beta \to \infty$ limiti alındığında yukarıda elde edilen hipergeometrik denklemin düzgün tekil noktalarından $z = \beta$ ile $z = \infty$ birleşmiş olur. Bu durumda bu nokta sonsuzda düzgün nokta olmaz.
Kummer denkleminin başka bir çözümü, Francesco Tricomi tarafından sunulan Tricomi konfluent hipergeometrik fonksiyon $U(\alpha;\gamma;z)$ olup

$$U(\alpha;\gamma;z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)}M(\alpha;\gamma;z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}z^{1-\gamma}M(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z)$$

şeklinde yazılmaktadır (Tricomi, 1947).

3.5. Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonun Özellikleri

Bazı elemanter fonksiyonlar konfluent hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Örnekler için (Abramowitz, 1970) kitabından faydanılmıştır.

$$\begin{aligned} {}_1F_1(\alpha;\alpha;z) &= {}_1F_1(1;1;z) = e^z \\ {}_1F_1(\alpha+1;\alpha;z) &= \left(1+\frac{z}{\alpha}\right)e^z \\ {}_1F_1(0;\gamma;z) &= 1 \end{aligned}$$

Laguerre diferansiyel denklemi olarak bilinen

$$zy^{''} + (\gamma+1-z)y^{'} + \alpha y = 0$$

denkleminin çözümü olan Laguerre polinomları

$$L_\alpha^{(\gamma)}(z) = {}_1F_1(-\alpha;\gamma+1;z)\frac{(\gamma+1)_\alpha}{(\alpha!)}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0$$

biçiminde yazılabilir.
Kummer z gerçel sayıları için

$$M(\alpha;\gamma;z) = M(\gamma-\alpha;\gamma;-z)$$

olduğunu göstermiştir. Francesso Tricomi ise eğer α, γ, z gerçel sayılarsa $z > 0$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere

$$U(\alpha;\gamma;z) = z^{1-\gamma}U(1+\alpha-\gamma;2-\gamma;z)$$

olduğunu kanıtlamıştır (Tricomi, 1947).

4. Bölüm

UYGULAMALAR

4.1. Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonlar ile Bazı Özel Fonksiyonlar Arasındaki Bağıntılar

$$\alpha = \frac{1}{2} - k + \mu \quad ; \quad \gamma = 1 + 2\mu$$

sabitler olmak üzere s değişkeni ile (27) denkleminde yapılacak

$$y = s^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{s}{2}} z$$

dönüşüm sonucunda konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin Whittaker standart şekli olarak bilinen

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \Big(-\frac{1}{4} + \frac{k}{s} + \frac{\frac{1}{4} \mp \mu^2}{s^2} \Big) z = 0$$

denklemi elde edilir (Altın, 2011). Whittakker denkleminin bir çözümü

$$z = s^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{s}{2}} \, {}_1F_1(\alpha; \gamma; s)$$

olarak yazılır. A ve B sabitler olmak üzere genel çözümü

$$z = Az_1 + Bz_2$$

biçiminde yazılmasını sağlayan z_1 ve z_2 çözümleri ise

$$\begin{cases} z_1 = {}_1F_1\Big(\dfrac{1}{2} - k + \mu; 1 - \mu; s\Big) \\ z_2 = s^{-2\mu} \, {}_1F_1\Big(-\dfrac{1}{2} - k - \mu; 1 - 2\mu; s\Big) \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca Bessel ve Modifie Bessel fonksiyonlarının da konfluent hipergeometrik fonksiyonlar ile aralarında bağıntılar vardır (Abramowitz, 1970).

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{{}_1F_1(\alpha; \gamma; \frac{-z}{\alpha})}{\Gamma(\gamma)} = z^{\frac{1-\gamma}{2}} J_{\gamma-1}(2\sqrt{s})$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{{}_1F_1(\alpha; \gamma; \frac{z}{\alpha})}{\Gamma(\gamma)} = z^{\frac{1-\gamma}{2}} J_{\gamma-1}(2\sqrt{s})$$

4.2. Tek boyutta Yalancı Harmonik Salınım için Konfluent Hipergeometrik Diferansiyel Denklem ile Genel Çözümünün Bulunması

Schrödinger denklemi kuantum fizikte önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde tek boyutta Schrödinger denkleminin genel çözümünün konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin integral çözümleri ile elde edilmesi incelenmektedir.

- h Planck sabiti
- $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ evrensel sabit
- m parçacığın kütlesini
- ω frekansı
- α dış alanın gücünü
- E kinetik enerjisini
- V potansiyel fonksiyonu
- Ψ dalga fonksiyonunu

temsil etmek üzere Schrödinger denklemi

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{48}$$

potansiyel fonksiyonu

$$V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\alpha}{x^2}$$

olan yalancı harmonik salınım olarak bilinmektedir. Schrödinger denkleminde $\zeta = x^2$ değişken dönüşümü yapılsın. Bunun için $\Psi(x)$ fonksiyonunun bağımsız x değişkenine göre birinci ve ikinci türevleri

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dx} &= \frac{d\Psi}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx}=\frac{d\Psi}{d\zeta}2x\\ \frac{d^2\Psi}{dx^2} &= \frac{d^2\Psi}{d\zeta^2}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2+\frac{d\Psi}{d\zeta}\frac{d^2\zeta}{dx^2}=\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2}4x^2+2\frac{d\Psi}{d\zeta}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Özel olarak$\hbar = m = \omega = 1$ değerleri alınarak $V(x)$ potansiyel fonksiyonu ve elde edilen türevleri (48) denkleminde yazılırsa

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\Psi(\zeta)}{d\zeta^2}4x^2+2\frac{d\Psi(\zeta)}{d\zeta}\right]+\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x^2}\right]\Psi(\zeta)=E\Psi(\zeta)$$

elde edilir. Son denklemde $\zeta = x^2$ yazılarak $\Psi(\zeta)$ fonksiyonuna göre düzenlendiğinde

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(4\zeta)\frac{d^2}{d\zeta^2}\Psi(\zeta) + \left(-\frac{1}{2}\right)2\frac{d}{d\zeta}\Psi(\zeta) + \left(\frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\zeta} - E\right)\Psi(\zeta) = 0$$

biçiminde yazılır. Elde edilen bu denklem, $\zeta \neq 0$ olmak üzere $\left(-\frac{1}{2\zeta}\right)$ ile çarpılarak yeniden yazıldığında

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\Psi(\zeta) + \frac{1}{2\zeta}\frac{d}{d\zeta}\Psi(\zeta) - \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{4\zeta^2} - \frac{E}{2\zeta}\right)\Psi(\zeta) = 0 \tag{49}$$

olarak yazılır. Yapılan dönüşüm sonrasında yazılan bu denklem incelendiğinde konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem olmadığı görülür. Konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleme dönüştürülmesi için $\Psi(\zeta)$ dalga fonksiyonu

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{4} \tag{50}$$

olmak üzere

$$\Psi(\zeta) = \zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta) \tag{51}$$

olarak alınsın. Bu fonksiyonun ζ değişkenine göre birinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\zeta}\Psi(\zeta) &= r\zeta^{r-1}(e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)) + \zeta^r\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta) + e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)\right) \\
&= \left(r\zeta^{r-1} - \frac{\zeta^r}{2}\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta) + \zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. İkinci mertebeden türevi de

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\zeta^2}\Psi(\zeta) &= \left(r(r-1)\zeta^{r-2} - \frac{r}{2}\zeta^{r-1}\right)(e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)) \\
&+ \left(r\zeta^{r-1} - \frac{\zeta^r}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{2}}w(\zeta) + e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)\right) + r\zeta^{r-1}e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta) \\
&+ \zeta^r\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta) + e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta)\right)
\end{aligned}$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\zeta^2}\Psi(\zeta) &= \zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta) + \left(-\frac{1}{2}\zeta^r + r\zeta^{r-1} + r\zeta^{r-1} - \frac{1}{2}\zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta) \\
&+ \left(r(r-1)\zeta^{r-2} - \frac{1}{2}r\zeta^{r-1} - \frac{1}{2}r\zeta^{r-1} + \frac{1}{4}\zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)
\end{aligned}$$

düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\zeta^2}\Psi(\zeta) &= \zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta) + \left(2r\zeta^{r-1} - \zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta) \\
&+ \left(r(r-1)\zeta^{r-2} - r\zeta^{r-1} + \frac{1}{4}\zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. $\Psi(\zeta)$ dalga fonksiyonu ile oluşturulan birinci ve ikinci mertebeden türevleri (49) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta) \quad &+ \quad \left(2r\zeta^{r-1}-\zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)+\left(r(r-1)\zeta^{r-2}-r\zeta^{r-1}+\frac{1}{4}\zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)\\ &+ \quad \frac{1}{2\zeta}\left(\left(r\zeta^{r-1}-\frac{\zeta^r}{2}\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)+\zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{4\zeta^2}-\frac{E}{2\zeta}\right)\zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)=0\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. $\omega(\zeta)$ ve türevlerine göre düzenlemek için

$$\begin{aligned}&\zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta)+\left(2r\zeta^{r-1}-\zeta^r+\frac{1}{2\zeta}\zeta^r\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)\\ -\quad &\left(r(r-1)\zeta^{r-2}-r\zeta^{r-1}+\frac{1}{4}\zeta^r+\frac{1}{2\zeta}r\zeta^{r-1}-\frac{1}{2\zeta}\frac{\zeta^r}{2}-\frac{1}{4}\zeta^r-\frac{\alpha\zeta^r}{4\zeta^2}+\frac{E\zeta^r}{2\zeta}\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)=0\end{aligned}$$

denkleminde işlemler devam ettirilerek

$$\begin{aligned}&\zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta)+\left(2r-\zeta+\frac{1}{2}\right)\zeta^{r-1}e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)\\ -\quad &\left(r(r-1)\zeta^{r-2}-r\zeta^{r-1}+\frac{1}{4}\zeta^r+\frac{1}{2}r\zeta^{r-2}-\frac{1}{4}\zeta^{r-1}-\frac{1}{4}\zeta^r-\frac{\alpha\zeta^{r-2}}{4}+\frac{E\zeta^{r-1}}{2}\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)=0\end{aligned}$$

ζ^{r-2} ve ζ^{r-1} ortak parantezlerine alındığında

$$\begin{aligned}&\zeta^r e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega''(\zeta)+\left(2r-\zeta+\frac{1}{2}\right)\zeta^{r-1}e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega'(\zeta)\\ -\quad &\left(\zeta^{r-2}\left[r(r-1)+\frac{1}{2}r-\frac{\alpha}{4}\right]+\zeta^{r-1}\left[-r-\frac{1}{4}+\frac{E}{2}\right]\right)e^{-\frac{\zeta}{2}}\omega(\zeta)=0\end{aligned} \tag{52}$$

denklemine ulaşılır. Elde edilen son denklemde ζ^{r-2} ile çarpım durumunda bulunan

$$r(r-1)+\frac{1}{2}r-\frac{\alpha}{4}$$

ifadesi (50) eşitliğinde seçilen r değeri için sıfıra eşittir. Bu durumda (52) denklemi $\zeta \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{\zeta^{r-1}}$$

ile çarpılarak düzenlendiğinde

$$\zeta\frac{d^2}{d\zeta^2}\omega(\zeta)+\Big(2r+\frac{1}{2}-\zeta\Big)\frac{d}{d\zeta}\omega(\zeta)-\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4}\Big)\omega(\zeta)=0 \tag{53}$$

konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemi elde edilir. Oluşturulan son denklem ile konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem karşılaştırıldığında

$$z=\zeta=x^2,\;\; \gamma=2r+\frac{1}{2},\;\; \alpha=\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4}$$

olduğu görülür. O halde (53) ile verilmiş konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleminin bir çözümü (43) eşitliğinden $C(\alpha,\gamma)$ sabiti ile ve q integral değişkeni olmak üzere

$$\begin{aligned}\omega_1\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2},x^2\Big) &= C\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2}\Big)e^{x^2}\\ &\int_0^1(1-q)^{(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4})-1}q^{(2r+\frac{1}{2})-(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4})-1}e^{x^2q}dq\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Diğer çözümü de (44) eşitliği ile

$$\begin{aligned}\omega_2\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2},x^2\Big) &= C\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2}\Big)x^{2(1-(2r+\frac{1}{2}))}e^{x^2}\\ &\int_0^1(1-q)^{(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4})-(2r+\frac{1}{2})}q^{-(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4})}e^{-x^2q}dq,\quad r\neq\frac{1}{4}\end{aligned}$$

olarak yazılır. Genel çözümü, (42) eşitliği kullanılarak c_1 ve c_2 gerçel veya karmaşık sabitleri ile

$$\omega(x^2)=c_1\,\omega_1\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2},x^2\Big)+c_2\,\omega_2\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2},x^2\Big)$$

formunda yazılır. Böylece dalga fonksiyonu, (51) ile verilen dönüşüm kullanılarak N normalizasyon sabiti olmak üzere

$$\Psi(x^2)=Nx^{2r}e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg[c_1\,\omega_1\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2},x^2\Big)+c_2\,\omega_2\Big(\frac{E}{2}-r-\frac{1}{4},2r+\frac{1}{2},x^2\Big)\Bigg]$$

biçiminde hesaplanır. Sınır değerleri verildiğinde elde edilen genel çözümden denklemin özel çözümü elde edilebilir.

4.3. Bir Coulomb Alanı Tarafından Saçılmanın Küresel Koordinatlarda Çözümü

- h Planck sabiti
- $\hbar=h/2\pi$ evrensel sabit
- p parçacığın momentumu
- $\lambda=h/p$ dalganın boyu
- E enerji seviyesi
- $k=p/\hbar=2\pi/\lambda$ yayılma sayısı
- r parçacığın konum vektörü
- l açısal momentum kuantum sayısı
- P_l Legendre polinomları
- $n=0,1,2,\ldots$ Başkuantum sayısı

- u_c, r değişkenine bağlı Coulomb dalga fonksiyonunun tamamını temsil eden fonksiyon

$$u_c = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(cos\theta)$$

olmak üzere radyal dalga denklemi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) + \left[k^2 - \frac{2nk}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0 \tag{54}$$

olarak yazılır. Radyal denklemde

$$R_l(r) = r^l e^{ikr} f_l(r) \tag{55}$$

dönüşümü yapılırken birinci türev

$$\frac{R_l(r)}{dr} = lr^{(l-1)}e^{ikr}f_l(r) + r^l ike^{ikr}f_l(r) + r^l e^{ikr}f_l^{'}(r)$$

şeklinde yazılır. Dönüşümün ikinci mertebeden türevinin elde edilmesi için birinci mertebeden türevde elde edilen ifade önce r^2 ile çarpılırsa

$$r^2\frac{R_l(r)}{dr} = lr^{(l+1)}e^{ikr}f_l(r) + r^{l+2}ike^{ikr}f_l(r) + r^{l+2}e^{ikr}f_l^{'}(r)$$

eşitliği yazılır. Elde edilen bu ifade bağımsız değişken olan r' ye göre tekrar türevlendiğinde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) &= l(l+1)r^l e^{ikr}f_l(r) + lr^{l+1}ike^{ikr}f_l(r) + lr^{l+1}e^{ikr}f_l^{'}(r) \\
&+ (l+2)r^{l+1}ike^{ikr}f_l(r) + r^{l+2}i^2k^2e^{ikr}f_l(r) + r^{l+2}ike^{ikr}f_l^{'}(r) \\
&+ (l+2)r^{l+1}e^{ikr}f_l^{'}(r) + r^{l+2}ike^{ikr}f_l^{'}(r) + r^{l+2}e^{ikr}f_l^{''}(r)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Elde edilen ikinci mertebeden türevin $\frac{1}{r^2}$ ile çarpılmış hali, birinci mertebeden türev ve (55) ile verilen dönüşüm radyal denklemde yazılırsa

$$\begin{aligned}
r^l e^{ikr}f_l^{''}(r) &+ \left[lr^{l-1} + ikr^l + (l+2)ikr^{l-1} + ikr^l\right]e^{ikr}f_l^{'}(r) \\
&+ \left[l(l+1)r^{l-2} + likr^{l-1} + (l+2)ikr^{l-1} + i^2k^2r^l\right]e^{ikr}f_l(r) \\
&+ \left[k^2r^l - 2nkr^{l-1} - l(l+1)r^{l-2}\right]e^{ikr}f_l(r) = 0
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Son denklem bağımsız r değişkenine bağlı $f_l(r)$ fonksiyonuna göre düzenlendiğinde

$$r^l e^{ikr}f_l^{''}(r) + \left[(2l+2)r^{l-1} + 2ikr^l\right]e^{ikr}f_l^{'}(r) + \left[(2l+2)ikr^{l-1} - 2nkr^{l-1}\right]e^{ikr}f_l(r) = 0$$

biçiminde yazılır. Son denklem $r \neq 0$ olmak üzere $(e^{ikr}r^{l-1})^{-1}$ ile çarpılarak

$$r\frac{d^2f_l}{dr^2} + \left[2(l+1) + 2ikr\right]\frac{df_l}{dr} + \left[2ik(l+1) - 2nk\right]f_l = 0 \tag{56}$$

şeklinde elde edilir. Son denklem, konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem ile karşılaştırıldığında bu denklemin dönüştürülmek istenen denklem tipinde olmadığı görülür. Elde edilen son denklemde $x = -2ikr$ dönüşümü uygulansın. Burada $f_l(r)$ fonksiyonun r değişkenine göre birinci mertebeden türevi

$$\frac{df_l}{dr} = -2ik\frac{df_l}{dx}$$

olarak yazılır. f_l fonksiyonun r değişkenine göre ikinci mertebeden türevi ise

$$\frac{d^2f_l}{dr^2} = 4i^2k^2\frac{d^2f_l}{dx^2}$$

olarak elde edilir. Oluşturulan birinci ve ikinci mertebeden türev ifadeleri (56) denkleminde yerlerine yazılarak

$$r4i^2k^2\frac{d^2f_l}{dx^2} + \Big[2(l+1) - x\Big](-2ik)\frac{df_l}{dx} + \Big[2ik(l+1) - 2nk\Big]f_l = 0$$

elde edilir. Elde edilen son denklem $x = -2ikr$ eşitliği ile düzenlenilerek

$$-2ikx\frac{d^2f_l}{dx^2} + \Big[2(l+1) - x\Big](-2ik)\frac{df_l}{dx} + \Big[2ik(l+1) - 2nk\Big]f_l = 0$$

biçiminde yazılabilir. $(-2ik)$ çarpanlarını kaldırmak için son denklem $k \neq 0$ olmak üzere $-\dfrac{1}{2ik}$ ile çarpılırsa

$$x\frac{d^2f_l}{dx^2} + \Big[2(l+1) - x\Big]\frac{df_l}{dx} + \Big[-(l+1) + \frac{n}{i}\Big]f_l = 0$$

denklemi elde edilir. Böylece (54) ile verilmiş olan radyal denklem, konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur. Denklemde (n/i) teriminin paydası rasyonel yapılırsa

$$x\frac{d^2f_l}{dx^2} + \Big[2(l+1) - x\Big]\frac{df_l}{dx} + \Big[-(l+1) - in\Big]f_l = 0$$

olarak yazılır. Dönüşümler sonucu ulaşılan bu denklem ile konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem karşılaştırıldığında

$$\alpha = l+1+in, \quad \gamma = 2(l+1), \quad z = x = -2ikr$$

eşitlikleri yazılır. Sırasıyla (43) ve (44) eşitliklerinden q integral değişkeni ve $C(\alpha,\gamma)$ sabiti ile

$$\begin{aligned}(f_l)_1(l+1+in, 2(l+1), -2ikr) &= C(l+1+in, 2(l+1))e^{-2ikr} \\ &\int_0^1 (1-q)^{(l+1+in)-1}q^{2(l+1)-(l+1+in)-1}e^{2ikrq}dq\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(f_l)_2(l+1+in, 2(l+1), -2ikr) &= C(l+1+in, 2(l+1))(-2ikr)^{1-(2(l+1))}e^{-2ikr} \\ &\int_0^1 (1-q)^{(l+1+in)-2(l+1)}q^{-(l+1+in)}e^{2ikrq}dq, \quad l \neq \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

integral çözümleri yazılır. Böylece (56) denkleminin genel çözümü, C_l normalizasyon sabiti olmak üzere c_1 ve c_2 gerçel veya karmaşık sabitleri ile

$$f_l(r) = C_l \left[c_1\,(f_l)_1(l+1+in, 2(l+1), -2ikr) + c_2\,(f_l)_2(l+1+in, 2(l+1), -2ikr)\right]$$

olarak elde edilir. (43) denklemi için sınır değerleri verildiğinde elde edilen genel çözüm kullanılarak denklemin özel çözümü elde edilebilir. Radyal denklem olarak verilen (55) dönüşümü ise

$$R_l(r) = C_l\, r^l e^{ikr}\left[c_1\,(f_l)_1(l+1+in, 2(l+1), -2ikr) + c_2\,(f_l)_2(l+1+in, 2(l+1), -2ikr)\right]$$

biçiminde yazılır.

Parabolik koordinatlar için de benzer uygulama yapılmıştır. Parabolik koordinatlar ξ, η, ϕ küresel kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\begin{aligned} \xi &= r - z = r(1-\cos\theta) \\ \eta &= r + z = r(1+\cos\theta) \\ \phi &= \phi \end{aligned}$$

bağıntıları ile yazılabilir. Hidrojen atomu için kuantum mekaniğinde parabolik koordinatlarda dalga denklemi

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left\{\frac{4}{\xi+\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\right] + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right\} - \frac{2Ze^2}{\xi+\eta}u = Eu \quad , E < 0$$

olarak yazılır (Schif, 1955). Son denklemin çözümünün ξ değişkenine bağlı olduğu ve diğer iki değişken η ve ϕ' ye bağlı olmadığı (Schif, 1955) kaynağından incelenebilir. $E > 0$ ve u_c Coulomb dalga fonksiyonunun tamamını temsil etmek üzere

$$u_c = e^{ikz} f$$

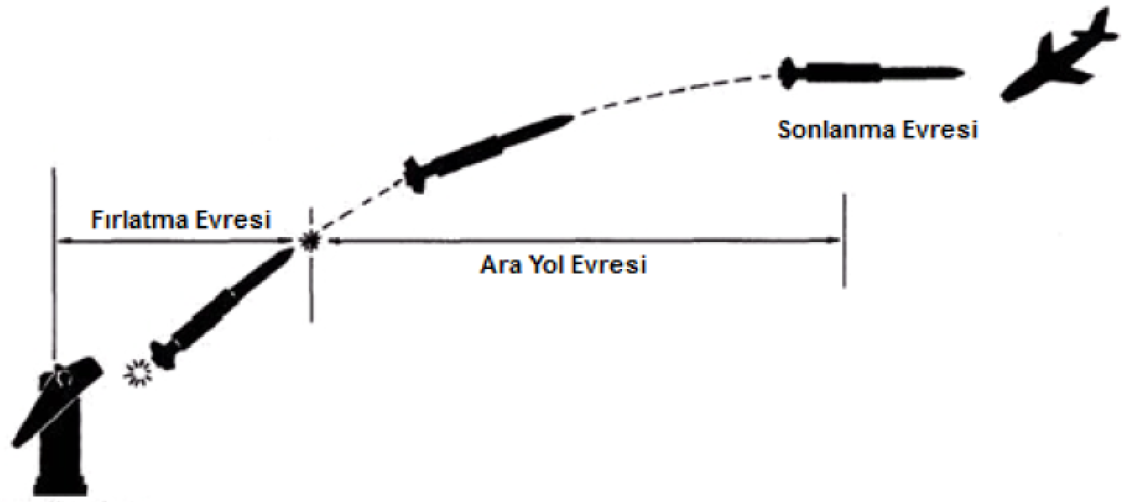
dönüşümü ile hidrojen atomu için parabolik koordinatlarda verilmiş olan dalga denklemi f fonksiyonu için

$$\xi\frac{d^2 f}{d\xi^2} + (1 - ik\xi)\frac{df}{d\xi} - nkf = 0$$

olur. Bu denklemin çözümleri (43) ve (44) eşitliklerinden yazılır.

4.4. Orantılı Navigasyon Sistem ile Hedef Arama Kılavuzunun Konfluent Hipergeometrik Fonksiyon Çözümleri

Taktik füzeler, fırlatma evresi (Boost Phase), ara yol evresi (Midcourse Phase), sonlanma evresi (Terminal Phase) olmak üzere üç evreden oluşmaktadır (Neri, 2001).



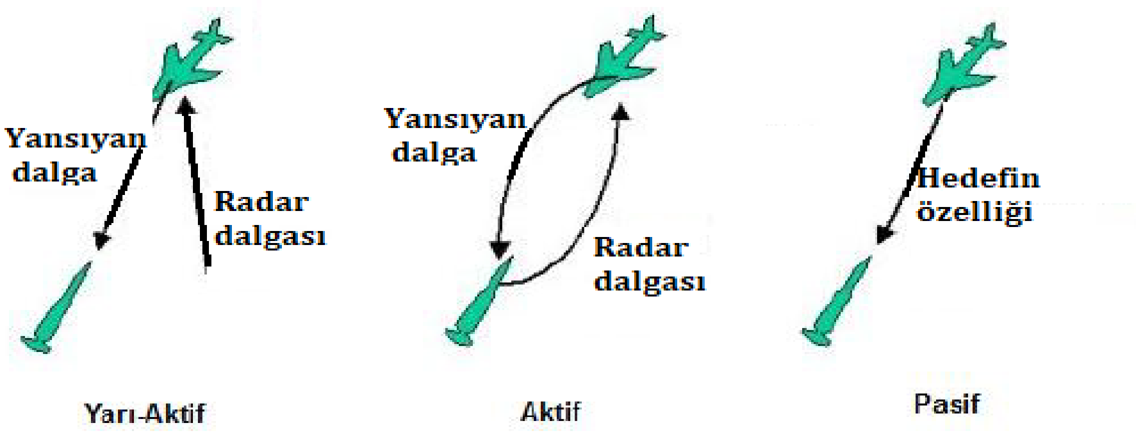
Şekil 4.1. Füze kılavuz evreleri(Neri, 2001)

- Fırlatma evresi: Fırlatma platformundaki füzenin güvenli bir şekilde platformdan ayrılması amaçlanmaktadır.Bu evre, füzenin platformdan fırlatılmasından, hızlandırıcı motorundaki yakıtın sonlanmasına kadar devam eder.
- Ara yol evresi: Bu evrede füzenin hızındaki artış neredeyse yok denilecek kadar küçüktür. Füze hedefin yakınlarında kalabilmek için küçük hareketler yapabilir.
- Sonlanma evresi: Füzenin uçuşundaki son evredir. Füzenin hedefe yeteri kadar yaklaşarak hedefi vurduğu evredir.

Askeri terimlerde füze kılavuz (güdüm) sistemi, herhangi bir insan kontrolü olmadan bir hedefe otonom olarak hareket edebilen araçlara verilen isimdir. Sonlanma evresinde füze güdüm sistemleri genel olarak komuta kılavuzu ve hedef arama kılavuzu olmak üzere iki gruba ayrılabilir (Neri, 2001).

- Komuta kılavuzu: Bir izleme istasyonunda algıyacılarla hedefin ve füzenin takip edilerek bir komuta hattı boyunca hedefe yönlendirilmesidir. Bu yöntemde füzenin, hedefin hareketi hakkındaki bilgileri hedeften almadığı anlaşılmaktadır.

- Hedef arama kılavuzu: Füzenin, hedeften aldığı sinyaller ile topladığı bilgiler sonucu hedefi takip etmesidir. Hedef arama kılavuzu hedefi tespit etmek için enerji gönderilmesi ya da gönderilmemesi durumuna göre üç farklı gruba ayrılır (Neri, 2001).



Şekil 4.2. Hedef arama kılavuz evreleri(Neri, 2001)

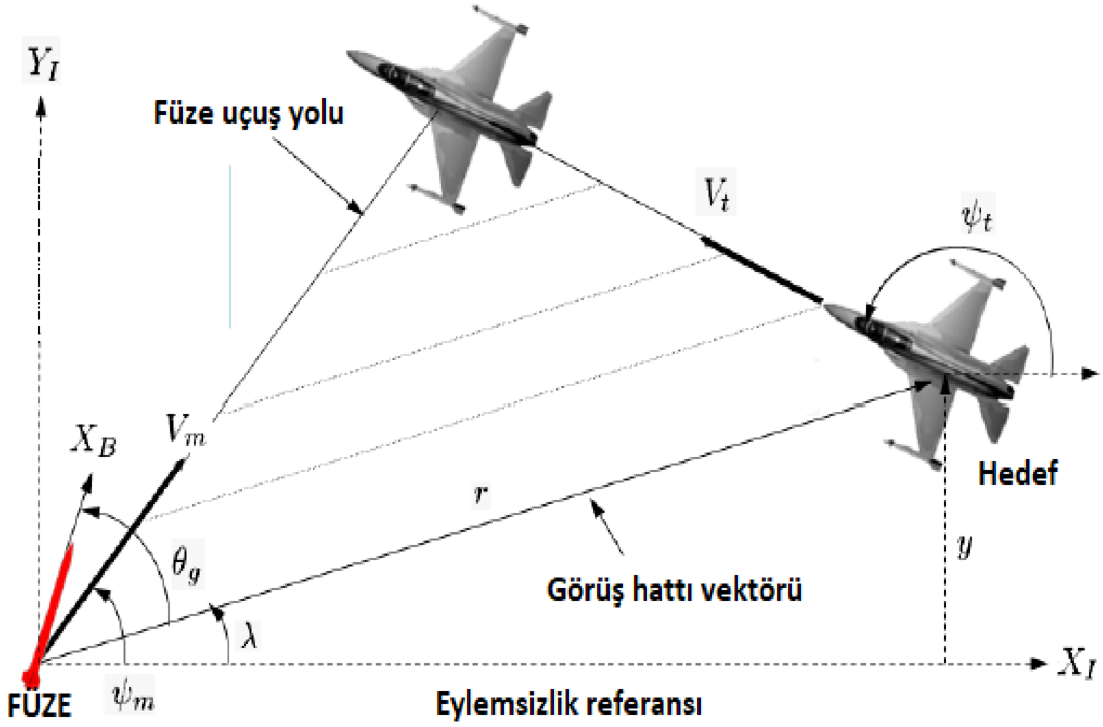
- Aktif hedef arama kılavuzu : Füzedeki arayıcılar, hedefe kendileri enerji göndererek ve hedeften yansıyan enerjiyi geri alarak hedefin takip edilmesidir. Bu yöntemde hedefe gönderilen enerji nedeniyle füze hedef tarafından tespit edileceğinden füzeye karşı tedbir alınabilmektedir.
- Yarı-Aktif hedef arama kılavuzu: Füze hedefini kendisi enerji göndererek tespit ve takip etmemektedir. Hedefin tespit edilmesi farklı bir kaynak vasıtasıyla yapılır. Hedefin tespiti füze tarafıdan yapılmadığı için hedef tarafından füzeye karşı tedbir alınmaktadır.
- Pasif hedef arama kılavuzu: Bu yöntemde ise füze hedef hakkındaki bilgileri hedefe herhangi bir enerji gönderilmeden tespit edilmesidir. Hedefin sahip olduğu ses, ısı, ışık, radyo sinyali, radar sinyali gibi çeşitli elektromanyetik ışımalar füze üzerindeki algılayıcı tarafından toplanır. Bu yöntemde hedefe herhangi bir şekilde enerji gönderilmediği için füzeye karşı hedef tarafından bir tedbir alınmaz.

Bu tez çalışmasında, pasif hedef arama kılavuzunda kullanılan yöntemlerden bir tanesi olan orantılı navigasyon ile hedef arama kılavuzu hakkında bilgi verilmektedir. Orantılı navigasyon ve hedef arama kılavuzu hakkında daha fazla bilgi için (Neri, 2001) ve (Sioruris, 2004) kaynaklarından yararlanılabilir.
Orantılı Navigasyon (PN): Orantılı navigasyon yasası, hedefi durdurmak için yön hatasını sıfırlamaya çalışır. Dönüş hızı ve görüş hattı hızı arasındaki orantı sabitine navigasyon sabiti (N)

denir. Navigasyon sabiti füzenin uçacağı yörüngeyi büyük ölçüde etkilemektedir.
Orantılı navigasyon kılavuzu (Proportional Navigation Guidance (PNG)), hedefin takipçiye göre konumunu belirleyebilen ve kendisini hedefe yönlendirmek için kendi komutlarını formüle edebilen bir kılavuzlama sürecini tanımlamak için kullanılan terimdir. Hedefin bazı ayırt edici özellikleri aracılığıyla bir hedefi seçmeyi, tanımlamayı ve takip etmeyi ya da kovalamayı gerektiren özel bir kılavuz şeklidir. Füzeyi hedefe yönlendirmek için ayırt edici özellik olarak; bir binadan gelen ısı veya ses, bir yerleşim yerinden gelen ışık, bir uçak veya gemiden gelen radar dalgalarının yansımaları gibi tanımlayıcı özellikler istihbarat kaynağı olarak kullanılmaktadır.
Orantılı navigasyon ile hedef arama kılavuzunda türetilmiş olan konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin (Ko, 2011) çözümünü ikinci bölümdeki integral yöntemi ile elde edeceğiz.

4.4.1. Hedef arama kılavuz sistemi (Ko, 2011)

Öncelikle diferansiyel denklemi türetmek için taktik füze güdüm teorisine dayanan problem tanıtılacaktır. Füze-hedef angajman geometrisi (Şekil 4.3.) ile gösterildiği gibi verilmektedir.

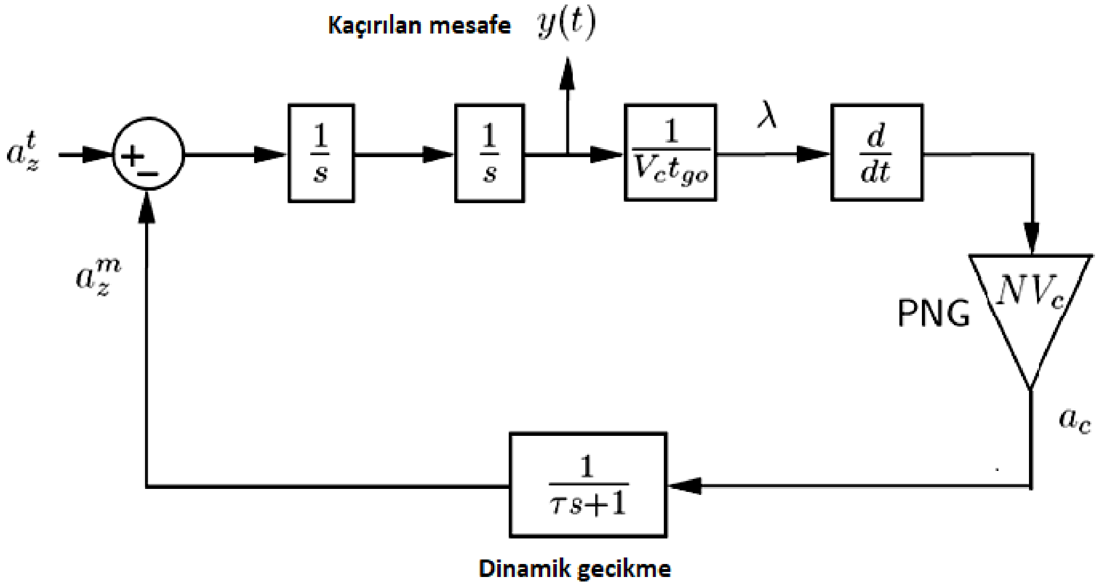


Şekil 4.3.Füze-hedef angajman geometrisi (Ko, 2011)

- V_m, füzenin hızının büyüklüğü
- V_t, hedefin hızının büyüklüğü
- λ, ilk görüş açısı (line of sight angle (LOS))

- ψ_m, uçuş yolu açısı
- θ_g, yalpa (dengeleme) açısı
- r, görüş hattı vektörü

olarak tanımlanmaktadır. Başlangıçtaki başlangıç yön hata açısı $\mid \psi_m - \lambda \mid$ yeterince küçükse, 1-boyutlu dinamik gecikmeli doğrusallaştırılmış bir orantılı navigasyon kılavuz döngüsü (Şekil 4.4.) ile gösterildiği gibi tasarlanabilir.



Şekil 4.4.1-boyutlu dinamik gecikmeli doğrusallaştırılmış orantılı navigasyon kılavuz döngüsü (Ko, 2011)

Tasarlanan bu döngüden aşağıdaki denklem elde edilmektedir. Döngü hakkında daha fazla bilgi için (Özkan, 2005) ve (Siouris, 2004) kaynaklarına bakılabilir.

$$X^{'}(t) = F.X(t) + G_d u_d(t) + Gu(t) \quad 0 \leq t \leq t_f \tag{57}$$

F, X, G ve G_d terimleri

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \\ a_m(t) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \quad G_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

olarak oluşturulmaktadır. Kullanılan bu matrislerde ve (57) denklemindeki değişkenler

- $u_d = a_t(t)$, hedefin ivmesi
- $u(t) = a_c(t)$, hızlandırma komutu
- $y(t)$, ilk görüş hattı vektörüne dik olan göreceli konum
- $v(t)$, ilk görüş hattı vektörüne dik olan göreceli hızı
- $a_m(t)$, füzenin ivmesi
- τ, sistemdeki 1 boyutlu gecikmeyi temsil eden zaman sabiti
- t_f, füzenin hedefine ulaştığı zaman
- v_c, görüş hattı boyunca hedefe yaklaşma hızı
- $\lambda^{'}(t)$, görüş hattının değişim oranı
- N, orantılı navigasyon sabiti (genellikle $N > 2$)
- b, orantılı navigasyon kılavuz için (Proportional Navigation Guidance) bir sabit

olarak tanımlanmaktadırlar. Kolaylık sağlaması için, hedefin sabit olduğunu varsayarak $a_t(t) \approx 0$ kabul edilmiştir. Orantılı navigasyon kılavuzunda, füzenin hızlanma komutu

$$a_c(t) = N v_c \lambda^{'}(t)$$

ile verilmektedir. Görüş açısını yeterince küçük tutan hedef arama kılavuz adımında, kullanılan denklemler

$$v_c(t) = r^{'}(t), \quad t_{go}(t) = \frac{r(t)}{v_c}, \quad \lambda(t) \approx \frac{y(t)}{r(t)}$$

olarak yazılmaktadır(Ko, 2011). $r(t)$ görüş hattı vektörüdür. F, X, G ve G_d ve tanımlanmış olan semboller (57) denkleminde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} y^{'}(t) \\ v^{'}(t) \\ a_m^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \\ a_m(t) \end{bmatrix} + a_t(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_c(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \qquad 0 \leq t < t_f$$

denklemi elde edilir. Matris işlemleri gerçekleştirilir.

$$\begin{bmatrix} y^{'}(t) \\ v^{'}(t) \\ a_m^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ -a_m(t) \\ -\frac{a_m(t)}{\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_t(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_c(t) \\ -\frac{a_c(t)}{\tau} \end{bmatrix} \qquad 0 \leq t < t_f$$

Matrislerin toplamı yapılarak

$$\begin{bmatrix} y^{'}(t) \\ \\ v^{'}(t) \\ \\ a_m^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ \\ -a_m(t) + a_t(t) + a_c(t) \\ \\ -\frac{a_m(t)}{\tau} + (-\frac{a_c(t)}{\tau}) \end{bmatrix} \qquad 0 \leq t < t_f$$

denklemi yazılır. $a_t(t) \approx 0$ olduğu varsayılarak,

$$c_0 = -a_m(0) + \frac{1}{\tau}y^{'}(0) + \frac{Nv_c}{\tau}y(0) - \frac{Nv_c b}{\tau}t_f$$

olmak üzere ikinci dereceden adi diferansiyel denklem olarak

$$y^{''}(t) + \frac{1}{\tau}y^{'}(t) + \frac{1}{\tau}Nv_c\lambda(t) = c_0 + \frac{Nv_c}{\tau}(t_f - t)$$

biçiminde yazılabilir. Kolaylık sağlaması için (PNG) orantılı navigasyon kılavuzu $b = 0$ varsayımı ile devam edilerek

$$y^{''}(t) + \frac{1}{\tau}y^{'}(t) + \frac{N}{\tau(t_f - t)}y(t) = c_0 \tag{59}$$

denklemi elde edilir. Ancak oluşturulan bu denklem konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem değildir. Seçilecek uygun dönüşümlerle (28) denklemine dönüştürülebilir.

4.4.2. Denklemin konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem ile integral çözümü

Bu bölümde dönüşümler sonucu denklemin elde edilişi ve integral çözümleri incelenecektir. $T = \dfrac{t}{t_f}$, $Y(T) = \dfrac{y(t)}{v_c t_f}$ dönüşümü uygulanarak ve

$$\epsilon = \frac{\tau}{t_f}, \quad c = \epsilon y^{''}(0) + y^{'}(0), t \in [0, 1]$$

olmak üzere (59) ile verilmiş olan denklem boyutsuzlaştırılarak

$$\epsilon y^{''}(t) + y^{'}(t) + \frac{N}{1 - t}y(t) = c \tag{60}$$

biçiminde elde edilir. Analitik çözümü elde etmek için son denklem, değişken değişimini kullanarak konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleme dönüştürelecektir.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - t}{\epsilon} \\ \\ w(x) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{61}$$

olarak alınsın. Burada ilk dönüşümde y değişkenin x'e ve x'in de t değişkenine bağlı olduğu görülür. Ayrıca ikinici dönüşümde y değişkeninin w değişkenine, w'nin x değişkenine ve x'in dee

t değişkenine bağlı olduğu görülmektedir. Bu durumda y değişkeninin birinci mertebeden türevi

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}$$

olarak yazılır. Yapılacak dönüşümler ile türevi uygulanırsa

$$y = xw(x)$$

olduğundan birinci mertebeden türevi

$$y^{'} = w(x)\Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big) + xw^{'}(x)\Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)$$

şeklinde elde edilir. Yazılan son denklem düzenlediğinde

$$y^{'} = \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)(w(x) + xw^{'}(x))$$

olarak yazılır. Elde edilen bu türev kullanılarak y değişekinin ikinci mertebeden türevi

$$y^{''} = \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)\Big(w^{'}(x)\Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big) + \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)w^{'}(x) + xw^{''}(x)\Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)\Big)$$

biçiminde elde edilir. Bu türev işlemi düzenlenerek

$$y^{''} = \Big(\frac{1}{\epsilon^2}\Big)(2w^{'}(x) + xw^{''}(x))$$

şeklinde yazılır. Oluşturlan birinci ve ikinci mertebeden türevler (60) denkleminde yerlerine yazılarak

$$\epsilon\Big(\Big(\frac{1}{\epsilon^2}\Big)(2w^{'}(x) + xw^{''}(x))\Big) + \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)(w + xw^{'}(x)) + \frac{N}{1-t}xw(x) = c$$

formunda yazılır. Son denklemde $(1-t)$ yerine (61) dönüşümlerinde verilen $(x\epsilon)$ yazılarak

$$\Big(\frac{1}{\epsilon}\Big)(2w^{'}(x) + xw^{''}(x)) + \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)(w + xw^{'}(x)) + \frac{N}{x\epsilon}xw(x) = c$$

$$\Big(\frac{1}{\epsilon}\Big)2w^{'}(x) + \Big(\frac{1}{\epsilon}\Big)xw^{''}(x) + \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)w + \Big(-\frac{1}{\epsilon}\Big)xw^{'}(x) + \frac{N}{\epsilon}w(x) = c$$

elde edilir. Bu denklem ϵ ile çarpılarak düzenlendiğinde

$$xw^{''}(x) + (2-x)w^{'}(x) - (1-N)w(x) = \epsilon c \tag{62}$$

konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemi elde edilir. (62) denkleminin homojen kısmının çözümleri için (43) ve (44) denklemlerinde $C(\alpha, \gamma)$ sabit ve q integral değişkeni olmak üzere

$$\begin{aligned} w_1(1-N, 2, x) &= C(1-N, 2)e^x \int_0^1 (1-q)^{1-N-1} q^{2-(1-N)-1} e^{-xq} dq \\ &= C(1-N, 2)e^x \int_0^1 (1-q)^{-N} q^N e^{-xq} dq \end{aligned}$$

ve (44) denkleminden

$$w_2(1-N,2,x) = C(1-N,2)x^{1-2}e^x \int_0^1 (1-q)^{1-N-2}q^{-\alpha}e^{-xq}dq$$

yazılır. (42) denkleminden de genel çözümü c_1 ve c_2 sabitleri ile

$$w(x) = c_1 w_1(1-N,2,x) + c_2 w_2(1-N,2,x)$$

olarak yazılır. Genel çözümü (61) ile verilen dönüşümler ile

$$y(t) = c_1\Big(\frac{1-t}{\epsilon}\Big)y_1\Big(1-N,2,\frac{1-t}{\epsilon}\Big) + c_2\Big(\frac{1-t}{\epsilon}\Big)y_2\Big(1-N,2,\frac{1-t}{\epsilon}\Big)$$

olarak düzenlenir. (60) denkleminin özel çözümü dahil edilerek kapalı çözümü ise

$$w(x) = c_1 w_1(1-N,2,x) + c_2 w_2(1-N,2,x) + \frac{c}{N-1}$$

olarak yazılır. (61) dönüşümleri ile (60) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1\Big(\frac{1-t}{\epsilon}\Big)y_1\Big(1-N,2,\frac{1-t}{\epsilon}\Big) + c_2\Big(\frac{1-t}{\epsilon}\Big)y_2\Big(1-N,2,\frac{1-t}{\epsilon}\Big) + \frac{c}{N-1}$$

biçiminde yazılır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Genelleştirilmiş hipergeometrik diferansiyel denklem üzerinde yapılan dönüşümle hipergeometrik diferansiyel denklem elde edilebilir. Bu denklemde dönüşümler yapılarak Gauss hipergeometrik diferansiyel denklem ve Hermite hipergeometrik diferansiyel denklem yazılabilir. Bu tez çalışmasında; hipergeometrik denklemde yapılan dönüşümle konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin oluşturulması açıklandı. Bu çözümlerin

$$\begin{cases} u_1(z) = g(\alpha, \gamma, z) \\ u_2(z) = z^{1-\gamma} g(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \\ u_3(z) = e^z g(\gamma - \alpha, \gamma, -z) \end{cases}$$

olduğu gösterildi. Elde edilen çözümler ile konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin genel çözümünün, A_1 ve B_1 sabitler olmak üzere

$$u = A_1 g(\alpha, \gamma, z) + B_1 z^{1-\gamma} g(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$$

formunda yazıldığı gösterildi. u_3 çözümünün u_1 ve u_2 çözümleri ile doğrusal bağımsız olmadığı açıklandı. (33) denkleminden elde edilen ($k_1 = 1 - \gamma$) ve ($k_2 = 0$) değerleri ile (34) ve (35) denklemlerinde bulunan (P_2) çözümlerinin aynı olduğu gösterildi. Buradan, konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin ($k_1 = 1 - \gamma$) için çözümleri elde edilirken uygulanan adımlar ($k_2 = 0$) değeri ile uygulandığında aynı çözümlerin oluşacağı kolaylıkla görülebilir.
Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümlerinin integral gösterimlerine yer verildi. Bu integral gösterimler

$$\begin{aligned} u_1(z) &= C(\alpha, \gamma) e^z \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\gamma-\alpha-1} e^{-zt} dt \\ u_2(z) &= C(\alpha, \gamma) z^{1-\gamma} e^z \int_0^1 (1-t)^{\alpha-\gamma} t^{-\alpha} e^{-zt} dt, \quad 1-\gamma \neq 0 \\ u_3(z) &= C(\alpha, \gamma) \int_0^1 (1-t)^{\gamma-\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{zt} dt \end{aligned}$$

formunda elde edildi. u_3 çözümünün u_1 ve u_2 çözümleri ile doğrusal bağımsız olmadığı açıklandı.
Konfluent diferansiyel denklemin integral çözümlerini kullanarak tek boyutta yalancı harmonik salınım denkleminin özfonksiyonlarının ve özdeğerlerinin bulunması gösterildi. Coulomb dalga fonksiyonu ile yazılan denklem, seçilen dönüşümle konfluent hipergeometrik diferansiyel denkleme dönüştürüldü. Bu denklemin küresel koordinatlardaki çözümü, elde ettiğimiz integral formundaki çözüm ile elde edildi. Orantılı navigasyon sistem ile hedef arama kılavuzunda kurulan denklemde belirli dönüşümler uygulanarak konfluent hipergeometrik diferansiyel denklem formunda elde edilmesi gösterildi. Bu denklemin çözümleri u_1 ve u_2 integral gösterimleri kullanılarak yapıldı.

Konfluent hipergeometrik diferansiyel denklemin çözümlerinin asimptotik genişlemeleri kullanılarak uygulama bölümündeki denklemlerin çözümleri için çalışma yapılabilir (Abramowitz, 1970 ve Jung, 2010). Hedef arama kılavuzunun konfluent difreansiyel denkleme dönüştürülerek elde edilen çözümlerinin gerçek hayatta askeri alanda ne gibi sonuçlar verebileceği üzerine araştırma ve çalışma yapılabilir.

KAYNAKÇA

Abramowitz, M. I. (1970). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Editors Stegun, National Bureau of Standards.

Altın, A. (2011). Uygulamalı Matematik, Gazi Kitabevi, Ankara.

Altundağ, H. (2020). Yüksek Lisans Özel Fonksiyonlar Teorisi UZEM Notları, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hitit Üniversitesi.

Augustyniak, I., Lamperska W., Masajada J., Płociniczak Ł. ve Popiołek-Masajada A. (2020). Off-Axis Vortex Beam Propagation through Classical Optical System in Terms of Kummer Confluent Hypergeometric Function. Photonics 7, 60.
URL: https://doi.org/10.3390/photonics7030060

Erdélyi, A., Magnus W., Oberhettinger F. ve Tricomi F.G.(1955). Higher transcendental functions, vol. I. New York, NY: McGraw-Hill.

Euler, L. (1769). Institutiones Calculi Integralis ,2. cilt. Petropoli impenfis Academine Imperialis Scientiarum.

Gauss, K. F. (1813). Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1.}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.(+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.(+1)(+2)}x^3$ +etc. Pars Prior, Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, 2 (1813). In [WW, 3:125–162].

Georgiev, G.N. ve Georgieva M.N. (2005). The Kummer confluent hypergeometric function and some if its applications in the theory of azimuthally magnetized circular ferrite waveguides, J. Telecomm. Information Technol.

Ince, E. L. (1956). Ordinary Differential Equations. New York: Dover Publications.
URL: https://archive.org/details/ordinarydifferen029666mbp/page/n527/mode/2up

Jung, S. M.(2010). Approximation of Analytic Functions by Kummer Functions, J.Inequality and Applications, ID898274, 11pp.

Ko, M. S. (2011). Approximation and analysis of confluent hypergeometric differential equation in homing.

Kummer, E. E. (1836). Über die hypergeometrische Reihe, vol. no. 15, pp. 39-83.
URL: https://doi.org/10.1515/crll.1836.15.39

Kummer, E. E. (1837). De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis, vol. no. 17, pp. 228-242.
URL: https://doi.org/10.1515/crll.1837.17.228

Neri, Filippo. (2001). Introduction to Electronic Defense Systems, Second Edition, Artech House.

Özkan, Bülent.(Eylül 2005). Hedef İzleyici Füzelerin Dinamik Modellemesi, Güdüm ve Denetimi, (Doktora tezi), Ankara: Makina Mühendisliği,
URL: http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0421

Polat, Z. Sonay. (T.Yüksek Lisans), Matematik Bölümü, Genelleştirilmiş ve Ters Çevrilmiş Bessel Polinomları, (Nisan 2004).

Schiff, Leonard I. (1955). Quantum Mechanics, 3. Baskı, McGraw-Hill book Company.

Siouris, G. M. (2004). Missile Guidance and Control System, Springer-Verlag New York, Inc.

Taşeli, H. (2003). Lecture Notes in Special Functions, METU, Department in Mathematics.

Tricomi, F. G. (1947-1948) Sulle funzioni ipergeometriche confluenti, Annali Matem. (4), t. 26, p. 141-176.

Tricomi, F. G. (1960). Fonctions Hyepemeometriquees, Gauthier Viliars, Commentes, Paris.

Wade, W.R. (2000). An Introduction to Analysis, PrenticeHall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2nd edition.

Whittakker, E. T. ve Watson G. N. (1920). A Course of Modern Analysis, Cambridge at the University Press, London.