

TEKNİK ETKİNLİK ANALİZİNDE STOKASTİK SINIR YÖNTEMİ KULLANIMI ÜZERİNE BİR DEĞERLENDİRME

Onur TUTULMAZ*

Öz

Etkinlik en geniş tanımıyla ideal seviyeye yaklaşma olarak tanımlanabilir. Ekonomiyi sayısallaştırırken kullanılan fonksiyonları dikkate alarak daha ayrıntıya girdiğimizde, etkinliği artık, fonksiyon olarak temsil edilebilen faaliyetlerde gözlenen değerlerin ideal değerlere yakınlık oranı olarak tanımlamak mümkün olur. Faaliyet olarak üretim faaliyetini ele aldığımızda etkinliğin iktisat içindeki günümüze kadar olan gelişimi ile yüz yüze geliriz. Etkinliği teknik etkinlik ile ekonomik veya tahsis etkinliği ayırırında ele almak mümkündür. Tahsis etkinliği, kaynak kullanımundaki etkinlik aracılığıyla ekonomi tanımının özüne atf yapmasına karşın uygulamaya yatkın değilken, teknik etkinlik bu ayırında fonksiyonel hesaplamaya yakınlığıyla uygulamalarda öne çıkmaktadır. Teknik etkinlik bu pratik özellikleriyle performans ölçümlerine yönelik kullanımlara bir altyapı sağlamaktadır. Teknik etkinlik tanımında kullanılan sınır fonksiyonun aynı zamanda üretim sınırını ima etmesi, stokastik sınır yöntemi için de çıkış noktasını oluşturur. Çalışmamızda, stokastik sınır yönteminin anlaşılmasını sağlamak için bu kavramsal ilişkiler incelenerek tespit edilen önemli noktalar tartışılmaktadır. Yöntemin öne çıkan özellikleri tanıtılmakla birlikte gelecekteki uygulamaları için çağrıda bulunulmakta; bunun yanında handikap oluşturabilecek özellikleri de araştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Etkinlik, Teknik Etkinlik, Stokastik Sınır Yöntemi, Sınır Fonksiyonu, Performans Ölçüm Yöntemleri, JEL kodları C40, D24.

An Evaluation on Technical Efficiency Analysis Using Stochastic Frontier Method

Abstract

In the most general sense, efficiency can be defined as to approach to optimum. In terms of functional forms in which economic relations generally described, efficiency can be defined as the rate of the approach to optimal values. Taking into consideration of the production function, we face the development of the efficiency concept. It is possible to put the efficiency concept into classifications like allocation or economical efficiency and technical efficiency.

* Yrd.Doç.Dr., Hitit Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi İktisat Bölümü,
(Post-Doctoral Researcher, York University, Faculty of Environmental Studies.
Address: 4700 Keele St. York University - onurtutulmaz@hitit.edu.tr).

While allocation efficiency relates the main problem of the allocation of economical resources, it is not practical to use as opposed to technical efficiency. Technical efficiency, in this classification, can supply a powerful understructure for the performance measuring. That a production function implies also its production frontier constitutes also the critical points of the stochastic frontier method.

Our study investigates and argues these conceptional relations to make a comprehensive sense of the stochastic frontier method. Carrying out this investigation, the study puts a call for further empirical and theoretical studies on the issue; on the other hand, it argues the possible handicaps of the method.

Keywords: *Efficiency, Technical Efficiency, Stochastic Frontier Method, Frontier Function, Performance Measuring Methods. JEL codes C40, D24.*

I. GİRİŞ

Etkinlik (efficiency) sözcüğünün günümüz dilleri içerisinde oldukça yaygın ve çeşitli kullanımı mevcuttur. Buna karşın, ekonomi içerisindeki kullanımları teknik terimler düzeyindedir. Bu çerçevede, en geniş tanımıyla etkinlik, fonksiyon olarak temsil edilebilen faaliyetlerde gözlenen değerlerin ideal değerlere yakınlık oranı olarak tanımlanabilir. Faaliyet olarak üretim faaliyetini ele aldığımızda, etkinliğin iktisat içindeki günümüze kadar olan gelişimi ile yüz yüze geliriz.

İktisadi bir kavram olarak etkinliği ele aldığımızda, etkinliğin bileşenleri, diğer iktisadi kavramlarla ilişkisi, ölçümü ve bunların ele alınışı açısından çeşitli ayrımlara yer veririz. Etkinlik kavramını, teknik etkinlik (technical efficiency) ve tahsis etkinliği (allocative efficiency) ayırımında ele almak mümkündür. Tahsis etkinliği, eldeki kaynakların optimum kullanımına yönelik olduğu için, ekonominin genel tanımına yakın bulunarak çoğu zaman ekonomik etkinlik olarak kullanılabilir (örn. Lee, 2012; Battese ve Coelli, 1991, s.2). Buna karşın, teknik etkinliğin hesaplamaya daha elverişli yapısı ve net sonuçlar verebilmesi onu performans ölçümleri açısından önemli ve yaygın kullanılan bir konuma getirmektedir.

Performans kriteri olmaya uygun yapısını tespit ettiğimiz teknik etkinlik kavramının parametrik fonksiyonlar üzerinden rahatlıkla tanımlanabilmesi, üretim fonksiyonunun doğrudan üretim sınırı olarak tanımlanabilmesi ve sınır fonksiyonunun stokastik tanımlanmasının etkisizlik oranının ekonometrik tahminine olanak vermesi, tüm bu kavramları birbiriyle ilintili kılmaktadır. Dolayısıyla özellikle stokastik sınır yönteminin özelliklerinin iyi anlaşılabilmesi bu kavramların ve arasındaki ilişkinin ayırdımına varılabilmeyi zorunlu kılmaktadır. Bu sebeple, çalışmamızda çözümlemeci bir metotla stokastik sınır yöntemi İkinci Bölüm içinde incelenirken üretim fonksiyonundan başlayan ve stokastik sınıra ulaşan bir sınıflandırma amaçlanmıştır. Üçüncü Bölümde ise yöntemin daha teknik özellikleri ve ekonometrik tahminlerde kullanılan tahmin edici modeller

incelenerek, yöntemin ayırd edici özellikleri üzerine ulaşılan sonuçlar son bölümde değerlendirilmiştir.

II. STOKASTİK SINIR (STOCHASTIC FRONTIER)

Stokastik^[1] sınır fonksiyonunu iyi anlayabilmek için, ilk önce sınır fonksiyonunu öğrenmek ve ne gibi bir farklılığın bir sınır fonksiyonunu stokastik sınır fonksiyonuna dönüştüreceğini kavramak gerekir. Sınır fonksiyonunu ise bir üretim fonksiyonunun üretim kapasitesine veya üretim sınırına yönelik bir tanımdan yola çıktığı için analize üretim fonksiyonundan başlamakta yarar vardır. Bu bölümde, incelediğimiz bu kavramlar arasındaki farkları net ortaya koyabilmek için üretim fonksiyonundan başlayabiliriz.

A. Üretim Fonksiyonu

Üretim faaliyeti parametrik ve parametrik olmayan (non-parametric) fonksiyonlarla temsil edilebilir. Parametrik olmayan fonksiyonlar kullandığımızda matematiksel programlama, parametrik fonksiyonlar kullandığımızda ise ekonometrik tahmin yöntemlerinden çözümleme sırasında yararlanırız. Burada teorik bütünsellik içinde parametrik olmayan fonksiyonlara yer vermenin yanında, geliştirilecek ekonometrik yöntemlere taban olarak parametrik fonksiyonlar ele alınacaktır.

İktisadi faaliyetler içinde üretim faaliyetlerini temsilen doğrusal, log-doğrusal, cobb-douglas (log-log), translog, CES, Zellner-Revankar genel fonksiyonu veya doğrusal olmayan fonksiyonlar gibi çeşitli fonksiyon türleri kullanılabilir. Üretim faaliyetini üretim fonksiyonuyla temsil ettiğimizde, üretimin girdileri ile çıktı(lar) arasındaki bağıntıyı kuran fonksiyondan bahsedebiliriz.

Bu çalışmada temel alınan, üretim faaliyetinin, elemanları girdiler ve çıktıdan oluşan üretim fonksiyonuyla temsil edilmesidir. Etkinlik analizi üretim fonksiyonuna uygulandığında teknik etkinlik kavramı gündeme gelmektedir. Nitekim bu sebeple kimi zaman üretim etkinliği olarak da adlandırılabilir. Etkinlik ölçümü uygulamalarında yer verilen en önemli fonksiyon biçimlerinden bazıları şöyledir:

Doğrusal üretim fonksiyonu, Eşitlik 1'de verilmektedir.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (\text{Eş. 1})$$

y : çıktı

x_1, x_2 : girdiler

β : parametreler

u : rassal kalıntı

Cobb-Douglas (log-log) üretim fonksiyonu, Eşitlik 2'de verilmektedir.

$$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 \ln(x_1) + \beta_2 \ln(x_2) + u \quad (\text{Eş. 2})$$

Translog üretim fonksiyonu, Eşitlik 3'de verilmektedir.

$$\begin{aligned} \ln(y) = & \beta_0 + \beta_1 \ln(x_1) + \beta_2 \ln(x_2) + \beta_3 \ln(x_1)^2 + \beta_4 \ln(x_2)^2 \\ & + \beta_5 \ln(x_1 x_2) + u \end{aligned} \quad (\text{Eş. 3})$$

Bu fonksiyonlar içinde, çeşitli avantajları nedeniyle etkinlik çözümlerinde tahmin edilecek üretim fonksiyonu olarak genellikle Cobb-Douglas fonksiyonu kullanılmaktadır. Nitekim Farrell (1957)'in çığır açan makalesinde etkinlik ölçümlerini yaptığı parametrik olmayan (non-parametrik) şablonun yanısıra parametrik bir yaklaşımın da önerisinde bulunmasının ardından, Farrell'ı takip eden Aigner ve Chu (1968, s.831) tarafından kullanılan Cobb-Douglas üretim fonksiyonu, Eşitlik 1'de verildiği gibi bir parametrik fonksiyon kullanılarak genellenebilir:

$$y = f(x^0) \cdot e^u \quad (\text{Eş. 4})$$

y : çıktı

x^0 : girdiler (Aigner x_1 ve x_2 gibi iki girdi alır. bkz. Aigner vd. 1968, s.831)

$f(\cdot)$: parametrik (üretim) fonksiyonu (Aigner Cobb-Douglas üretim fonksiyonu kullanmıştır, bkz. Aigner vd. 1968, s.831)

u : olasılıklı hata terimi

Eşitlik 4, doğrusal olarak ifade edildiğinde, Eşitlik 5'deki şeklini alır.

$$\ln y = X B + u \quad (\text{Eş. 5})$$

u : negatif olmayan rassal değişken

y : çıktı(lar)

X : girdi vektörü

B : parametre vektörü

Üretim ilişkisini kapalı bir fonksiyon olarak aldığımızda, üretim faaliyeti, elemanları girdiler ve çıktı(lar) olan bir fonksiyon ile temsil edilir. Ayrıca belirtmek gerekir ki, üretim faaliyetini temsil eden kapalı fonksiyonun elemanlarına çıktı fiyatlarını aldığımızda hasılat fonksiyonuna, girdi fiyatlarını aldığımızda maliyet fonksiyonuna ulaşmak mümkündür.

B. Sınır (Frontier) Fonksiyonu

Sınır fonksiyonu, aslında etkinsizliğin olmadığı durumda ya da tam etkin olunan durumdaki fonksiyonun değeridir. Buna göre, fonksiyon olarak tanımladığımız ilişki, aslında kapalı olarak aynı zamanda o fonksiyonel ilişkinin en etkin hali olan sınırına ait ilişkidir. Burada ele alınan üretim fonksiyonu olduğuna göre, yukarıda ele aldığımız üretim fonksiyonları aynı zamanda o üretim ilişkisinin sınırı durumundadır.

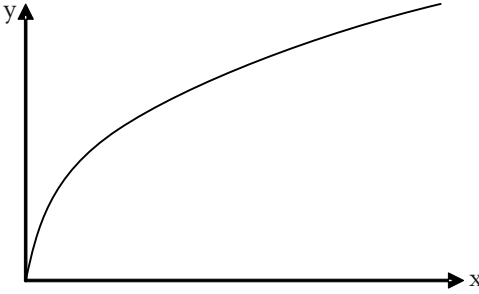
Yukarıda ele alınan fonksiyonlar içinde çeşitli avantajları nedeniyle etkinlik çözümlerinde tahmin edilecek üretim fonksiyonu olarak genellikle Cobb-Douglas fonksiyonu seçilmektedir. Yukarıda belirtildiği gibi bir üretim fonksiyonuna atıf yapan ve Farrell (1957)'in çalışmasını takiben Aigner ve Chu (1968)'nin işaret ettiği üretim fonksiyonunu bir üretim sınırı olarak tekrar vermek gerekirse şu şekildedir:

$$y = f(x) \cdot e^u \quad (\text{Eş. 4})$$

Doğrusal olarak ise, daha önce Eşitlik 5'de verildiği gibi ifade edilebilir.

$$\ln y = XB + u \quad (\text{Eş. 5})$$

u : negatif olmayan rassal değişken



Şekil-1: Bir üretim fonksiyonunun sınırı

Üretim fonksiyonlarının bu şekilde yer alması sonucu, Cobb-Douglas üretim fonksiyonlarının mikroiktisadi yorumlama avantajlarının yanısıra, doğrusallaştırılan hata terimi yardımıyla etkinsizliği temsil edecek olan orana ulaşmak kolaylaşmaktadır.

C. Stokastik Sınır (Stochastic Frontier) Fonksiyonu

Üretim fonksiyonunun yer aldığı Eşitlik 4 veya onun doğrusal regresyon olarak yazılmasıyla ulaşılan Eşitlik 5'te yer alan hata terimi u , etkinsizliğin yanısıra ölçme hatalarını ve şans, hava, şoklar gibi diğer sapmaları da kapsamaktadır. Eğer bu tesadüfi sapmaları temsil edecek şekilde bir " v " hata terimi eklersek, ölçeceğimiz " u " hata terimi artık sadece etkinsizliği ölçecektir. Bu tarz bir modelleme Aigner, Lovell

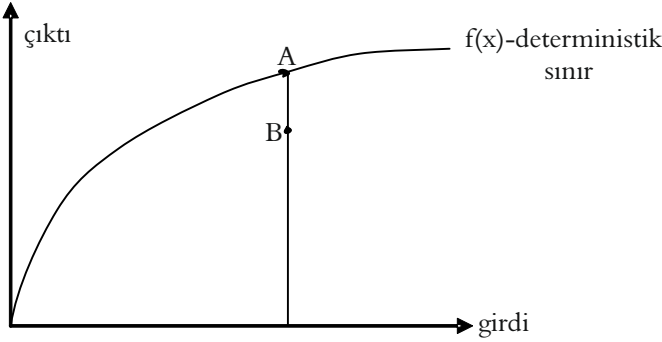
& Schmidt (1977) tarafından ilk defa hayata geçirilmiştir. Bu şekilde bir yeniden düzenleme ile üretim fonksiyonu Eşitlik 6'da veya onun logaritmik dönüşümü olan Eşitlik 7'de olduğu gibi verilebilir:

$$y = f(x) \cdot e^{(v-u)} \quad (\text{Eş. 6})$$

Eşitlik 6 logaritmik dönüşüme uğratarak Eşitlik 7 şeklinde ifade edilebilir.

$$Y = XB + v - u \quad (\text{Eş. 7})$$

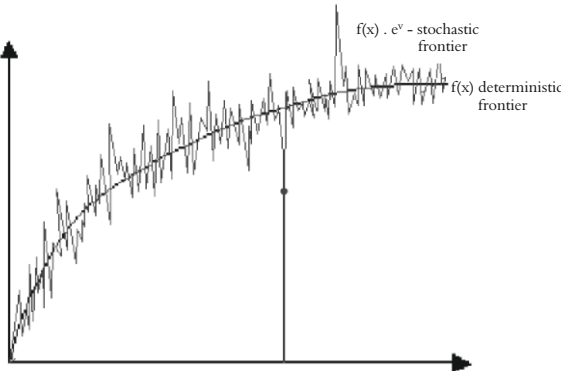
$$\text{veya } y = \exp(XB + v - u)$$



Şekil-2: Determenistik sınır (deterministic frontier) fonksiyonu

Stokastik sınır yönteminin adı, üretim sınırının tanımlanmasında Eşitlik 6 veya Eşitlik 7 ile ifade edilen farktan gelmektedir. Daha önce üstteki şekildeki $f(x)$ veya $\exp(XB)$ şeklinde deterministik olarak verilen üretimin sınır fonksiyonu (deterministic frontier) artık aşağıdaki şekildeki gibi $f(x) \cdot e^v$ yada $\exp(XB + v)$ biçiminde verilmektedir.

Sonuç olarak, sınır (frontier) artık deterministik olmaktan çıkmış ve rassallık içeren stokastik sınır haline gelmiştir. Bu şekilde bir stokastik sınır Şekil 3'de olduğu gibi temsil edilebilir.



Şekil-3: Determenistik ve stokastik sınır (frontier) fonksiyonları

Teknik etkinliği, gözlenen çıktının ideal çıktıya yani sınır çıktı değerine (frontier output) oranı olarak tanımlamıştık, bu şekildeki bir tanımlama Eşitlik 8'de verilmektedir:

$$TE = \frac{y_o}{y_F} \quad (\text{Eş. 8})$$

y_o : gözlenen çıktı

y_F : sınır çıktı değeri (frontier output)

Şekil 2'de yer alan deterministik sınıra göre ilk durumda B noktasında B etkinlik:

$$TE = \frac{y_o}{y_F} = \frac{f(x).e^{-u}}{f(x)} = e^{-u} \quad y_f: \text{deterministik sınır}$$

Şekil 3'deki B noktası için de aynı tanım geçerlidir, fakat burada deterministic sınır (frontier)'in yerini stokastik sınır almıştır. B noktasındaki etkinlik:

$$TE = \frac{y_o}{y_{SF}} = \frac{f(x).e^{(v-u)}}{f(x).e^v} = e^{-u}$$

y_o : gözlenen çıktı

y_{SF} : stokastik sınır çıktı değeri (stochastic frontier output)

Böylece, sapmalardan ve ölçme hatalarından arındırdığımız u hata terimi aracılığıyla, etkinsizlikten doğan sapmayı artık ölçebileceğimize gelmiş oluruz.

Teorik olarak durum çok net olmasına karşın uygulamada öyle değildir. Gözlemlenemeyen v hata terimi bilinmemekle beraber sınır fonksiyonu da başlangıçta belli değildir. Bu durumda sınır fonksiyonu tahmin edilir, tahmin sonucu oluşan hatalar bize $(v-u)$ 'yu, yani hataları birleşik halde verir. Bu nedenle hataları ayırtmak gerekir. Bunun için hata terimlerinin dağılımını bilmek (veya varsaymak) gerekir. Aigner, Lovell ve Schmidt (1977) bu yüzden hata terimlerinin dağılımlarını ayrı ayrı belirlemişlerdir:

v i.i.d. $N(0, \sigma_v^2)$; bağımsız ve türdeş olarak dağıtılmış rassal değişken

u yarı-normal dağılım veya üstel olacaktır.

Hata terimlerinin dağılımında bu şekilde bir ayırma gidilmesi sayesinde, maksimum olabilirlik tahmini için gerekli bileşik hatanın dağılımının elde edilebilmesinin yanında, aşağıda verildiği gibi hata terimlerinin varyansları kullanılarak tanımlanan bir parametre yardımıyla hata terimlerini ayırabilecek konuma gelebiliriz. Aşağıda, bu amaçla kurgulanmış iki farklı spesifikasyona yer verilmektedir:

$$\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 \quad (\text{Eş. 8})$$

$$\lambda = [\sigma_u / \sigma_v] \geq 0 \quad \text{Aigner, Lovell ve Schmidt (1977)}$$

$$\lambda = 0 \quad : \text{sapmanın hepsi diğer sebeplerden (gürültü/noise)}$$

kaynaklanmaktadır.

$\lambda = \infty$: sapmanın hepsi etkisizlikten kaynaklanmaktadır.

$$\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2 \quad (\text{Eş. 9})$$

$$\gamma = (\sigma_u^2 / \sigma^2) \in [0,1] \quad \text{Battese ve Cora (1977)}$$

$\gamma = 0$: sapmanın hepsi diğer sebeplerden (gürültü/noise) kaynaklanmaktadır.

$\gamma = 1$: sapmanın hepsi etkisizlikten kaynaklanmaktadır.

Yukarıda tanımlanan λ yada γ parametresinin maksimum olabilirlik tahmininin içine sokulmasıyla, iteratif bir süreç sonunda β , λ (yada γ) ve σ 'nın tahmin değerleri elde edilir. Elde edilen λ (yada γ) ve σ 'nın değerleri ile hata terimlerini ayrıştıracak bilgiye ulaşılmış olunur. Battese ve Cora tarafından tanımlanan parametrenin bir üstünlüğü olarak, γ 'nın $[0,1]$ arasında olmasından dolayı seçeceğimiz başlangıç değeriyle, iteratif süreç vasıtasıyla sonuca giderken kolaylık sağlaması görülebilir.

D. Uygulama Alanları

Etkinlik analizi uygulamaları tüm dünyada hızla çoğalmakta, aynı zamanda uygulama alanları da sürekli genişlemektedir. Etkinlik analizi uygulamalarının ne kadar değişik konuları içerebileceği Tablo 1 incelendiğinde görülebilir. Fakat daha önce birçok açıdan farklı özellikler içerebilen etkinlik analizi uygulamaları için bazı sınıflandırmalara gitmek mümkündür:

- TE analizi yapacağımız prosesin fonksiyonuna göre:
 - 1- Non-parametrik fonksiyonlar: matematiksel programlama kullanılır.
 - 2- Parametrik fonksiyonlar:
 - Cobb-douglas
 - Linear
 - Log-linear
 - Translog
 - Zellner-Revankar genelleştirilmiş fonksiyonu
 - diğer
- Veri setine göre:
 - Kesit veri
 - Zaman serisi
 - Panel seri

- Konu bağlamına göre:
 - Üretim
 - Maliyet
 - Diğer

Konu bağlamındaki tasnif, üretim üzerinde uygulanacak analizin yönüyle ilgilidir. Üretim bağlamında, çalışılan fonksiyonun çıktılarıyla ilgileniriz: Gözlemlenen değerler sınırın altında yer alırken, ekonomik amaç da bu değerlerin sınır (frontier)'a doğru maksimize edilmesine yönelmektedir.

Maliyet üzerine çalışmalarda konuya girdi yönüyle yaklaşılır; bu çalışmalarda gözlemlenen değerler sınırın üstünde yer alırken, ekonomik amaç da gözlenen değerlerin sınıra doğru minimize edilmesindedir.

Çalışma konularına, ekonomik amaç ve gözlenen değerlerin sınıra göre yerine istinaden yapılan tasnifler literatürde farklı şekillerde de yapılabilmektedir. Aşağıda verilen bu ayrımın, aslında aynı tasnifin farklı tanımlanmasından ibaret olduğu görülebilir.

- Ekonomik amaca (economic objective) göre
 - Maksimizasyon amaçlı
 - Minimizasyon amaçlı
- Frontier'in konumuna göre :
 - Gözlenen değerler frontier'in altında
 - Gözlenen değerler frontier'in üstünde

Uygulama alanlarını gözler önüne serebilmek amacıyla yapılan çalışmalardan örneklerin de verildiği bir tablo aşağıda verilmektedir (Tablo 1). Tablodaki çocuk bakımı, eğitim ve hastaneler gibi konular düşünülürse, uygulama alanlarının ne denli genişlemeye yatkın olduğu görülecektir.

Tablo 1: Konularına ve Ülkelerine Göre Bazı Etkinlik Analizi Uygulamaları

Uygulamalar	Yazarlar
Hava Kuvvetleri Bakım Ünitesi	
İsrail	Roll, Golany and Seroussy (1989)
ABD	Bowlin (1987)
Banka Şubeleri	
Belçika	Tulkens ve Vaden Eeckaut (1990)
Kanada	Parkan (1987)
Hindistan	Das, A., A. Nag, ve S.C. Ray (2009)
Norveç	Berg vd. (1993)
ABD	Sherman ve Gold (1985)

Uygulamalar	Yazarlar
Çocuk Bakımı	
İngiltere	Hughes (1988)
ABD	Cavalluzzo and Yanofsky (1991)
Mahkemeler	
Belçika	Jamar and Tulkens (1990)
ABD	Lewin, Morey and Cook (1982)
Gelişme Özürlü Bakımı Faaliyeti	
ABD	Dusansky and Wilson (1989, 1991)
Eğitim-İlk ve İkincil Eğitim	
İngiltere	Jesson, Mayston and Smith (1987)
ABD	Desai and Schinnar (1990)
	Fare, Groskopf and Weber (1989)
	Lovell, Walters and Wood (1990)
	Ray (1991)
	Wycoff and Lavigne (1991)
Eğitim-Üçüncül Eğitim	
Avustralya	Cameron (1989)
Kanada	Jenkins (1991)
ABD	Ahn, Arnold, Charnes and Cooper (1989)
	Ahn, Charnes and Cooper (1988)
	Goudriaan and de Groot (1991)
İşgücü ofisleri	
ABD	Cavin and Statford (1985)
“Fast-Food” Şubeleri	
ABD	Banker and Morey (1986)
Anayol Bakımı	
Kanada	Cook, Kazakov, ve Roll (1989)
ABD	Deller ve Nelson (1991)
Hastaneler	
ABD	Banker, Das ve Datar (1989)
	Byrnes ve Valdmanis (1990)
	Groskopf ve Valdmanis (1987)
	Register ve Bruning (1987)
	Sexton vd. (1989)
Askere Alma Üniteleri	
ABD	Lovell and Morey (1991)
	Lovell, Morey and Wood (1991)
Belediyeler	
Belçika	Vanden Eeckaut, Tulkens ve Jamar (1992)
	Charnes, Cooper ve Li (1989)
	Ali, Lerne ve Nakosten (1992)

Uygulamalar	Yazarlar
Milli Parklar ABD	Rhodes (1986)
Posta Ofisleri Belçika ABD	Tulkens (1986) Register (1988)
Vergi Daireleri İngiltere	Dyson ve Thanassoulis (1988) Thanassoulis, Dyson and Foster (1987)
Çöp Toplama İsviçre İngiltere	Burgat ve Jeanrenaud (1990) Cubbin, Domberger ve Meadowcroft (1987)
Şehir Ulaşımı Belçika Çin	Tulkens, Thiry ve Palm (1988) Thiry ve Tulkens (1992) Chang ve Kao (1992)
Demiryolu ABD İngiltere	Kumbakhar (1987) Mulatu & Crafts (2005)
Havayolu* ABD Uluslararası	Cornwell et al. (1990) Good et al. (1991) Ray and Mukherje (1996) Schmidt and Sickles (1984) Sickles (1985) Sickles et al. (1986) Coelli et al. (1999) Marin (1995)

III. STOKASTİK SINIR (FRONTIER) TAHMİNİ

A. Gelişimi

Farrell (1957)'in çığır açan makalesinde, matematiksel programlama yöntemiyle teknik ve tahsis etkinliği ölçümlerini yaptığı non-parametrik şablonun yanısıra, parametrik bir yaklaşımın da önerisinde bulunmuştur. Farrell'ı takip eden Aigner ve Chu (1968), Eşitlik 4'de verildiği gibi, $y = f(x).e^u$ şeklinde, bir parametrik fonksiyon belirlemişlerdir.

Aigner ve Chu (1968) daha sonra aynı yöntemi takip eden Afriat (1972), Richmond (1974) çalışmalarında olduğu gibi frontier'i, $y_F = f(x)$, deterministik olarak almış ve matematiksel programlama yöntemleriyle belirlemeyi önermiştir. Timmer (1971) ve daha sonra Dugger (1974) aynı matematiksel yöntemleri

kullanmalarına rağmen, ilk kez sürece istatistiksel özellikler getirmişler, kendileri bunu olasılıklı frontier (probabilistic frontier) olarak adlandırmışlardır; böylece aslında istatistiksel özellikleri olan hata terimini örtük olarak kabul etmişlerdir. Schmidt (1976) ilk kez hata teriminin istatistiksel özelliklerini açıkça tartışmış, ve bunun ardından Aigner, Lovell ve Schmidt (1977) tarafından şu anda yaygın olarak kullanılan stokastik frontier tanımlanmış ve bu tanımla elverişli hale gelen ML-maksimum olabilirlik yöntemiyle yapılan stokastik frontier'in ekonometrik tahmini bütün dünyaya tanıtılmıştır.

Aigner, Lovell ve Schmidt (1977) tarafından çizilen çerçeve ekonometrik tahmin yönteminin sağlam bir temeli olmuş, bundan sonra iteratif sürecin işlenmesine, veri setinin kullanımına yönelik ilerlemeler kaydedilmiştir. Bunlardan bazıları şöyledir:

- Batterse and Cora (1977), γ parametresini tanımlayarak iterasyonda kolaylık getirmiştir.
- Jondrow, Materov, Lovell & Schmidt (1982), ML tahmini sonuçlarını kullanarak firma-TE değerlerini bulabilmiştir.
- Battese and Coelli (1988), Schmidt and Sickles (1984), Kumbhakar (1987, 1990) yaptıkları çalışmalarla ekonometrik tahmini panel serilerle yapmışlardır.

Stokastik sınır/frontier tahmini için yapılan çalışmalarda fonksiyon türüne, veri türüne, sapma tanımlarına ve iterasyon süreci gibi çeşitli etkenlere göre ekonometrik yöntem yanında FDH (free disposal hull), DEA (Data Envelopmet Analysis), Matematiksel Programlama yöntemleri gibi birçok yöntem kullanılmaktadır. Yapılan çalışmalar üssel olarak artmakta, bu çalışmalarda en çok kullanılan ekonometrik yöntem de bahsettiğimiz etkenlere göre kendi içinde farklılaşmaktadır. Bu çalışmada stokastik frontier tahmininde temel oluşturan Aigner, Lovell, Schmidt (1977) tahmin yöntemi temel alınarak incelenmektedir.

B. Tahmin Edicinin Elde Edilişi

M.A. Weinstein (1964) tarafından türetilen, normal ve yarı normal dağılımın toplamı bir rassal değişkenin istatistiksel özellikleri aşağıdaki gibidir:

Sıklık işlevi Eşitlik 10'da verilmektedir,

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma} \cdot f^* \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) \cdot \left[1 - F^* \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) \cdot \lambda \right] \quad (\text{Eş. 10})$$

$f^*(\cdot)$; standart normal dağılım sıklık işlevi

$F^*(\cdot)$; standart normal dağılım birikimli sıklık işlevi

$$\varepsilon = u + v \quad -\infty \leq \varepsilon \leq \infty$$

$$\sigma^2 = \sigma_v^2 + \sigma_u^2$$

$$\lambda = [\sigma_u / \sigma_v]$$

$$E(\varepsilon) = E(u) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma_u$$

$$Var(\varepsilon) = Var(u) + Var(v) = \left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

Sıklık işlevini kullanarak log-olabilirlik fonksiyonunu oluşturabiliriz (Eş. 11):

$$\begin{aligned} \ln L(y|\beta, \lambda, \sigma^2) &= -\frac{N}{2} \ln(\pi/2) - N \ln \sigma \\ &+ \sum_{i=1}^N \ln[1 - F^*\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \cdot \lambda\right)] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \quad (\text{Eş. 11}) \end{aligned}$$

Eşitlik 7 ile verilen, $Y = X\beta + U - V$ modeli için maksimum olabilirlik (ML) tahmin edicilerinin ilk sıra koşulları Eşitlik 12-14'de verilmektedir:

Birinci Derece Koşulları (FOC):

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta'x_i)^2 + \frac{\lambda}{2\sigma^3} \sum_{i=1}^N \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} (y_i - \beta'x_i) = 0 \quad (\text{Eş. 12})$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} (y_i - \beta'x_i) = 0 \quad (\text{Eş. 13})$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta'x_i) \cdot x_i + \frac{\lambda}{\sigma} \sum_{i=1}^N \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} \cdot x_i = 0 \quad (\text{Eş. 14})$$

x_i bir $(k \times 1)$ vektördür ve X matrisinin i 'nci sırasıdır;

β , $(k \times 1)$ katsayı vektörüdür.

$$(\text{Eş. 13})' \text{ den} \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N \frac{f_i^*}{(1 - F_i^*)} (y_i - \beta'x_i) = 0$$

elde edilir, bunu (Eş. 12)'de yerine koyalım.

$$(Eş. 12)' den \longrightarrow -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta' \mathbf{x}_i)^2 = 0$$

buradan σ 'yi çekersek Eşitlik 15'e ulaşılır:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \beta' \mathbf{x}_i)^2 \quad (Eş. 15)$$

Böylece varyansın tahmin edicisi elde edilmiştir. Fakat $\hat{\beta}$ diğer denklemlerde $\hat{\sigma}^2$ 'den bağımsız elde edilemediği için iteratif bir çözüm söz konusu olacaktır. Aigner, Lovell ve Schmidt (1977) yukarıdaki sonucu ileriye götürerek iteratif süreci de ortaya koymuşturlar. Fakat optimizasyona yönelik bir çok algoritma vardır ve sürekli yenileri ortaya çıkmaktadır.

Sürecin nasıl işlediğini göstermek açısından çok özet bir algoritma vermek gerekirse basit olup geniş kabul gören Batesse ve Cora (1977)' nin algoritmasını inceleyebiliriz. Log-olabilirlik (log-likelihood) fonksiyonu ve devamındaki iterasyon algoritması Eşitlik 16 ile verilmektedir:

$$\ln \underline{L}(y|\beta, \gamma, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln(\pi/2) - N \ln \sigma + \sum_{i=1}^N \ln[1 - F^*(z_i)] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N \varepsilon \quad (Eş. 16)$$

$$z_i = [(y_i - \beta' \mathbf{x}_i) / \sigma] \cdot \sqrt{(\gamma / 1 - \gamma)}$$

1- EKK uygulanarak β , σ^2 için başlangıç tahminleri elde edilir (β , σ^2 tahminleri sapmalıdır).

2- $\gamma \in [0, 1]$ olan γ değerleri için $\ln L$ hesaplanır.

3- İlk iki adımdan elde edilen β, σ^2 ve γ değerlerini kullanarak,

yakınsayınca kadar iteratif maksimizasyon süreci izlenir.

C. Uygulama Modellerine Yönelik İki Örnek

Ekonometrik modellemede doğrusal dönüşüme yatkınlıklarıyla sağladığı avantajlar nedeniyle, üretim fonksiyonu olarak Cobb-Douglas ve translog üretim fonksiyonları yaygın olarak kullanılmaktadır. Cobb-Douglas üretim fonksiyonu Eşitlik 17'de verildiği gibidir.

$$\ln Y_{it} = \beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j \chi_{jit} \quad (Eş. 17)$$

Translog üretim fonksiyonu E şitlik 18'de verilmektedir.

$$\ln Y_{it} = \beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j \chi_{jit} + \sum_{j \leq k}^N \sum_{k=1}^N \beta_{jk} \chi_{jit} \chi_{kit} \quad (\text{Eş. 18})$$

Y çıktı

χ logaritmik girdi

N girdi sayısı

i i'nci üreticiyi; t t'inci zaman birimini belirtir,

Girdilerin kareleri ve çapraz çarpımlarını içeren ikinci toplamalı terim olmadığına fonksiyon Cobb-Douglas üretim fonksiyonuna dönmektedir. Dolayısıyla translog üretim fonksiyonu daha genel form olarak tanımlanabilir.

Etkinlik tahminlerinin uygulamasının yapıldığı stokastik sınır (frontier) modellerine gelince, yöntemle temelde oluşturan Aigner, Lovell ve Schmidt (1977) modelinin, onu baz alarak değişik açılardan geliştirmeye çalışan sayısız uzantısından bahsetmek mümkündür. Burada ele alacağımız örnek modeller, yine bu modelin uzantısı olan Battese & Coelli (1992) ve Battese & Coelli (1995) modelleridir:

Örnek Model 1: *Zaman-değişken etkinsizlik modeli (time-varying inefficiency model) Battese & Coelli (1992) Spesifikasyonu*

$$\begin{aligned} Y_{it} &= x_{it} \beta + (V_{it} - U_{it}), \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T \\ U_{it} &= (U_i \exp(-\eta (t-T))) \end{aligned} \quad (\text{Eş. 19})$$

Y_{it} , i'nci firma ve t'inci zaman için üretimin logaritmik hali

x_{it} , i'nci firma ve t'inci zaman için (üretim fonksiyonuna göre transforme edilmiş) girdi miktarları vektörü (1xK)

β , tahmin edilecek parametre vektörü (Kx1)

V, iid $N(0, \sigma_v^2)$; bağımsız ve türdeş olarak dağıtılmış rassal değişken

U, iid sıfırda kesikli $N(\mu, \sigma_u^2)$; negatif olmayan, bağımsız ve türdeş olarak dağıtılmış rassal değişken

(γ , $\gamma = \sigma_u^2 / (\sigma_v^2 + \sigma_u^2)$; hata terimi ayırıştırma ve iterasyon sürecinde kullanılır, Battese&Cora (1977))

Modeli, Aigner, Lovell, Schmidt (1977) modelinde birkaç açıdan açılım sağlayan bir uzantısı olarak özetleyebiliriz. Model dengesiz (unbalanced) panel verilerle tahmine; η ve μ 'yü tahmin ederek, etkinsizliğin zamana göre değişen boyutu ve hata teriminin ortalama değeri üzerinde değerlendirme ve testlere imkan sağlamaktadır.

Örnek Model 2: *Etkinsizlik etkenleri modeli (inefficiency effects model)*
Battese & Coelli (1995) Spesifikasyonu

$$\begin{aligned} Y_{it} &= x_{it} \beta + (V_{it} - U_{it}), \quad i=1, \dots, N; t=1, \dots, T \\ U_{it} &= z_{it} \delta + W_{it} \end{aligned} \quad (\text{Eş. 20})$$

Y_{it} , i 'nci firma ve t 'inci zaman için üretimin logaritmik hali
 x_{it} , i 'nci firma ve t 'inci zaman için (üretim fonksiyonuna göre transforme edilmiş) girdi miktarları vektörü ($1 \times K$)
 β , tahmin edilecek parametre vektörü ($K \times 1$)
 V , iid $N(0, \sigma_v^2)$; bağımsız ve türdeş olarak dağıtılmış rassal değişken
 U , iid sıfırda kesikli $N(m, \sigma_u^2)$, $m_{it} = z_{it} \delta$; negatif olmayan, bağımsız ve türdeş olarak dağıtılmış rassal değişken
 z_{it} , etkinsizlik etkenlerine ilişkin olarak etkinsizliği etkileyebilecek değişkenlerin ($1 \times P$) vektörü
 δ , parametre vektörü ($P \times 1$)
 W , iid gözlenemeyen rassal değişken
 $(\gamma, \gamma = \sigma_u^2 / (\sigma_v^2 + \sigma_u^2))$; hata terimi ayrıştırma ve iterasyon sürecinde kullanılır, Battese & Cora (1977))

Model 2'yi de özetle, Aigner, Lovell, Schmidt (1977) etkinsizlik (U hata terimi) içinde etkili olabilecek değişkenleri modele ilave eden bir uzantısı olarak tanımlayabiliriz. Model 2 de panel verilerle tahminlere imkan vermektedir.

Bu modeller içinde çıktıyı veya etkinsizliği etkilediği düşünülen zaman ve ölçek kuklası gibi, trend değişkeni gibi kukla değişkenlere (teoriye uygun olarak) x veya z içinde olacak şekilde yer verilebilir.

IV. SONUÇ

Etkinlik kavramının yaygın kullanımına ve sıklıkla ekonomik veya tahsis etkinliği yerine geçecek şekilde kullanımına karşın, teknik etkinliğin fonksiyonel ilişkiler içerisinde hesaplamaya yatkın yapısı nedeniyle, özellikle performans ölçümü uygulamalarına yönelik önemli bir teorik altyapıyı sağladığı tespit edilmektedir.

Ekonomide ilgilendiğimiz birçok konuyu, üretim fonksiyonu çerçevesine yerleştirerek tanımlayabilmekteyiz. Üretim fonksiyonlarının doğrudan olarak üretim sınırını ima edebilmesi ve aynı zamanda bu sınırı ekonometrik olarak tahmin edebilecek yapıyı sağlaması önemlidir. Stokastik sınır yönteminin etkinsizliği ve sınırı tek ekonometrik sınamayla tahmin edecek yapıyı sağlaması ise yöntemin kritik noktasını oluşturmaktadır. Performans ölçümlerinin önem kazandığı günümüz ekonomisinde, stokastik sınır yönteminin bu özellikleriyle teknik etkinlik saptamasını ekonometrik tahmin yöntemleriyle tanıştırmayı, yöntemin en önemli özelliği olarak ileri sürülebilir.

Bu önemli özellikleri, yöntemin literatürdeki uygulama alanlarının çeşitliliğini de açıklamaktadır. Literatürdeki çalışmaların, yöntemin çeşitli uygulamalara uygun bir altyapıyı sağladığının tespitiyle, teknik etkinlik hesaplarının uygulamalarına ihtiyaç duyulan Türkiye uygulamalarına da yöntemin katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Stokastik sınır yönteminin özellikleri ve ileriki araştırmalar için taşıdığı potansiyel anlam tartışılırken, öne çıkabilecek en önemli eksikliğine değinmek gerekir. Yöntemin büyük bir açılıma neden olduğu, hata teriminin 2 ayrı parçada ayrıştırılması özelliği, yöntemin aynı zamanda ekonometrik açıdan bir handikap noktasını oluşturmaktadır. Ekonometrik yöntemlerin başarısı genellikle yapılan tahminlerin sonucundaki hata terimi üzerinden yapılan ekonometrik incelemeler ve hata teriminin istatistiki özelliklerine dayanmaktadır. Her ne kadar ekonometrik uygulamaların hızla arttığı görülse de, uygulamalara temel olan yöntemlerin gelişmesi o derece hızlı olmamaktadır. Daha önce yapılan tüm ekonometrik metodu kökünden değiştiren zaman serisi özelliklerinin 3-4 on yıllık uygulaması ve zaman boyutu özelliklerinin panel serilere uygulanmasının çok daha yeni ve gelişmekte olduğu düşünülürse, hata terimini 2'ye çıkartan böyle bir yöntemin, ekonometrik yöntemler ve sınamalar açısından belirsizlik içinde kalan alanlarının çokluğu tahmin edilebilir. Dolayısıyla son tahlilde, uygulamaya yönelik çalışmalara duyulan ihtiyaç yanında, hata terimini iki kısma ayırıştıran bu yapıyı ekonometri teorisi içerisinde de inceleyecek çalışmalara ihtiyaç duyulduğunu belirtmek yerinde olacaktır.

NOTLAR

- [1] Stokastik sözcüğü Yunanca “stokhos”dan gelmekte olup 'hedef' veya 'öküz gözü' anlamını taşır (Kennedy, 2008, s.3). Hedeften sapma ve hataları kapsayacak şekilde olasılıklı olma durumuna atıf yapmaktadır; bu yüzden Türkçe'de olasılıklı veya rassal olarak da kullanılmaktadır.

KAYNAKÇA

- AFRIAT, S.N. (1972), “Efficiency estimation of production functions”, *International Economic Review*, 13, 568-598
- AIGNER, D.J. ve Chu S. (1968), “On Estimating the Industry Production Function”, *American Economic Review*, 58: 826-835.
- AIGNER, D.J., Lovell, C.A.K. ve Schmidt, P. (1977), “Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models”, *Journal of Econometrics*, 6, 21-37.
- BATTESE, G.E. ve Coelli, T.J. (1988), “Prediction of Firm-Level Technical Efficiencies With a Generalised Frontier Production Function and Panel Data”, *Journal of Econometrics*, 38, 387-399.

- BATTESE, G.E. ve Coelli, T.J. (1991), "Frontier Production Functions, Technical Efficiency And Panel Data: With Application To Paddy Farmers In India". *Working Papers in Econometrics and Applied Statistics*. No.56, Department of Econometrics, University of New England, Armidale.
- BATTESE, G.E. ve Coelli, T.J. (1992), "Frontier Production Functions, Technical Efficiency and Panel Data: With Application to Paddy Farmers in India", *Journal of Productivity Analysis*, 3, 153-169.
- BATTESE, G.E. ve Coelli, T.J. (1995), "A Model for Technical Inefficiency Effects in a Stochastic Frontier Production Function for Panel Data", *Empirical Economics*, 20, 325-332.
- BATTESE, G.E. ve Corra, G.S. (1977), "Estimation of a Production Frontier Model: With Application to the Pastoral Zone of Eastern Australia", *Australian Journal of Agricultural Economics*, 21, 169-179.
- BAUER, P.W. (1990), "Recent Developments in the Econometric Estimation of Frontiers", *Journal of Econometrics*, 46, 39-56.
- BERG, S.A., Forsund, F.R, Hjalmarsson, L. ve Suominen, M. (1993), "Banking Efficiency in the Nordic Countries". *Journal of Banking & Finance*. (17) 2-3, 371-388.
- COELLI, T.J., Perelman, S. ve Romano, E. (1999), "Accounting for environmental influences in stochastic frontier models: With application to international airlines", *Journal of Productivity Analysis*, 11, 251-273.
- CORNWELL, C., Schmidt, P. ve Sickles, R.C. (1990), "Production Frontiers with Cross-Sectional and Time-Series Variation in Efficiency Levels", *Journal of Econometrics*, vol. 46, 185-200.
- DAS, A., A. Nag, ve S.C. Ray (2009), "Labor-use Efficiency in Indian Banking: A Branch-level Analysis". *Omega*, 37 (2009) 411-425.
- FÄRE, R. ve Lovell, C.A. (1978), "Measuring the Technical Efficiency of Production", *Journal of Economic Theory*, 19, 150-162.
- FARREL, M. (1957), "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of the Royal Statistical Society*, A120: 253-81.
- FRIED, H.O., Lovell, C.A.K. ve Schmidt, P. (eds.), (1993), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Oxford University Press, Oxford.
- GOOD, D.H., Nadiri, M.I. ve Sickles, R.C. (1991), "The structure of production, technical change and efficiency in a multinational industry: An application to U.S. airlines", *National Bureau of Economic Research, NBER Working Paper No:3939*.
- HUGHES, M.D. (1988), "A Stochastic Frontier Cost Function for Residential Child Care Provision", *Journal of Applied Econometrics*, 3, 203-214.
- JONDROW, J., Lovell, C.A.K., Materov, I.S. ve Schmidt, P. (1982), "On estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model", *Journal of Econometrics*, 19, 233-238.
- KENNEDY, P. (2008), *A Guide to Econometrics*, 6th edition. Blackwell, Massachusetts.
- KUMBHAKAR, S.C. (1987), "Production Frontiers, Panel Data: An Application of U.S. Class 1 Railroad", *Journal of Business and Economic Statistics*, 5 (2): 249-255.

- KUMBHAKAR, S.C. (1990), "Production frontiers, panel data and time-varying technical inefficiency", *Journal of Econometrics*, 46:1/2 (October/November), 201-12.
- LEE, R.D. (2012), "Economic Efficiency". *FEE-Foundation for Economical Education*. http://www.fee.org/the_freeman/detail/economic-efficiency/#axzz2F1VAFZw1. Erişim tarihi: 13/08/2012.
- MARIN, P.L. (1995), "Productivity differences in the airline industry: Partial deregulation versus short-run protection", *JEL Discussion Paper*, No.EI/11, JEL Nos.:D24,L59,L23,L93.
- MULATU, A. ve Crafts, N.F.R. (2005), "Efficiency among Private Railway Companies in a weakly Regulated System: The Case of Britain's Railways in 1893-1912", *Working Paper No: 08/05*, Department of Economic History, London School of Economics (<http://www.lse.ac.uk/collection/economichistory/>).
- RAY, S.C. ve Mukherje, K. (1996), "Decomposition of the Fisher ideal index of productivity: A non-parametric dual analysis of US Airlines Data", *The Economic Journal*, vol.106, no.439, 1659-1678.
- RICHMOND, J. (1974), "Estimating the efficiency of production", *International Economic Review*, 15, 515-521.
- SCHMIDT, P. (1976), "On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions", *The Review of Economics and Statistics*, vol.58, issue 2, 238-239.
- SCHMIDT, P. ve Sickles R.C. (1984), "Production Frontiers and Panel Data", *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 2, No. 4, 367-374.
- SICKLES, R.C. (1985), "A nonlinear multivariate error components analysis of technology and specific factor productivity growth with an application to the U.S. airlines", *Journal of Econometrics*, 27, 61-78.
- SICKLES, R.C., Good, D. ve Johnson, R.L. (1986), "Allocative distortions and the regulatory transition of the U.S. airline industry", *Journal of Econometrics*, 33, 143-163.
- TIMMER, C. (1971), "Using a Probabilistic Frontier Production Function to Measure Technical Efficiency", *Journal Of Political Economy*, 79: 776-794.
- WEINSTEIN, M.A. (1964), "The sum of values from a normal and truncated normal distribution", *Technometrics*, 6, 104-105 and 469-470.

